

České vysoké učení technické
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky



**Stanovení matice geometrického uspořádání pro
tomografii měkkého rentgenového záření na
společném evropském tokamaku JET včetně testů
ověřujících její správnost**

Výzkumný úkol

Autor práce:
Školitel:
Školní rok:

Bc. Martin Imříšek
RNDr. Jan Mlynář, PhD.
2008/2009

Rád bych poděkoval vedoucímu své práce RNDr. Janu Mlynáři, Ph.D za trpělivé a ochotné vedení mé práce.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a použil pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 16.9. 2009

Martin Imříšek

Název práce: Stanovení matice geometrického uspořádání pro tomografii měkkého rentgenového záření na společném evropském tokamaku JET včetně testů ověřujících její správnost

Autor: Bc. Martin Imříšek

Obor: Fyzikální inženýrství

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: RNDr. Jan Mlynář, Ph.D., odd. tokamak ÚFP AV ČR, v.v.i.

Abstrakt: Na tokamaku JET lze profil vyzařování měkkého rentgenového záření z plazmatu sestavit tomograficky pomocí kamer KJ5 a V (nebo T), jejichž detektory míří do plazmatu celkem v 52 různých směrech. Z konstrukčních důvodů míří kamera KJ5 do tokamaku mírně šikmo od roviny poloidálního průřezu. Díky toroidální symetrii tokamaku lze ovšem průhledy kamery KJ5 do požadované roviny poloidálního průřezu promítnout, čímž se průhledy mírně zakříví. Prvky matice geometrického uspořádání pro tomografii měkkého rentgenového záření odpovídají vlivu jednotlivých pixelů tomografického obrazu na detektory. Při zanedbání rozbíhavosti zorných polí detektorů lze za prvky matice vzít vzdálenosti, s jakými přímkami průhledů detektorů protnou prostor vymezený určitým pixelem. Předkládaná práce se zabývá výpočtem matice, jejím grafickým ověřením a použitím matice při tomografické rekonstrukci pomocí Tichonovovy regularizace omezené minimem Fisherovy informace z modelových a skutečných dat.

Klíčová slova: JET, tomografie, měkké rentgenové záření, Tichonovova regularizace

Title: Setting of geometric layout matrix for tomography of soft X ray emission at european tokamak JET including tests confirming its validity

Author: Bc. Martin Imříšek

Abstract: The profile of soft X ray emission from plasma is possible to reconstruct at the tokamak JET by tomography method via camera KJ5 and V (or T), its detectors aim into plasma in 52 different directions. From the construction reasons the direction of camera KJ5 is slightly oblique with regard to the poloidal cross section plane. Because of the tokamak toroidal symmetry, lines of sight of the camera KJ5 can be projected into required poloidal cross section plane, consequently these projections of lines of sight are slightly curved. Elements of geometric layout matrix for tomography of soft X ray emission present the influence of the individual pixels in tomographic picture on the detectors. With neglect of real width of detectors' visual field, the elements of matrix can be equal to the lengths of lines of sights inside the pixel. This thesis describes the calculations of matrix, its graphic confirmation and using of the matrix in tomographic reconstruction by means of Tikhonov regularisation constrained by minimum Fisher information from real and model data.

key words: JET, tomography, soft X ray, Tikhonov regularisation

Obsah

1. Úvod	5
2. Tomografie měkkého rentgenového záření na JET	6
2.1 Měření pro tomografii měkkého rentgenového záření na JET	6
2.2. Tomografická rekonstrukce pomocí Tichonovovy regularizace omezené minimem Fisherovy informace	10
3. Výpočet transformační matice pro tomografii měkkého rentgenového záření	12
3.1 Výpočet pro kameru V	12
3.2 Výpočet pro kameru KJ5	12
4. Testování vypočtené transformační matice	16
4.1. Grafické ověření	16
4.2. Tomografické rekonstrukce při vypočtené transformační matici	19
4.2.1 Tomografické rekonstrukce předem známé modelové funkce	19
4.2.2. Tomografické rekonstrukce ze skutečných dat naměřených na JET	22
5. Diskuze	23
6. Závěr	24
Literatura	25
Dodatek A - Použitá modelová funkce	26
Dodatek B - Tichonovova regularizace omezená minimem Fisherovy informace (řešení)	27

1. Úvod

Tokamak JET (Joint European Torus), který se nachází v Anglii nedaleko města Culham, je v současnosti největším zařízením s magnetickým udržení plazmatu v provozu. Jeho hlavním cílem je připravit cestu pro experimentální tokamaky ITER a DEMO, které budou dalším předstupněm termojaderné elektrárny.

K velkému množství diagnostik na tokamaku JET patří také měření měkkého rentgenového záření (záření o energiích 0,12keV až 12keV), které poskytuje např. informace o rovnováze plazmatu, o energetických ztrátách vyzařováním, nečistotách a o interakci plazmatu se stěnami. K určení prostorového rozlišení emisivity měkkého rentgenového záření se využívá tomografie.

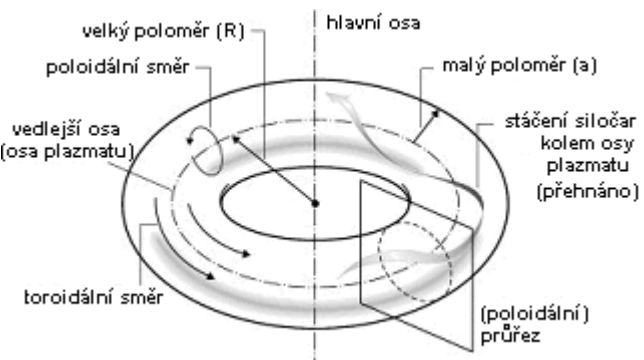
Práce se zabývá výpočtem transformační matice pro tomografii měkkého rentgenového záření, která dovoluje s pomocí zvolené tomografické metody vypočítat dvourozměrné rozložení (v poloidálním průřezu tokamaku - viz obr 1.1) emisivity měkkého rentgenového záření z měření několika detektorů v různých směrech. Princip tomografie spočívá v tom, že se lze na velikost signálu naměřeného v určitém detektoru dívat jako na lineární kombinaci emisivity jednotlivých pixelů hledaného tomografického obrazu. Pro signál f_i v příslušném detektoru tak v ideálním případě platí:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j + \zeta_i, \quad i \in \hat{L}, \quad (1.1)$$

kde g_j je řešení pro j -tý pixel (mřížka pixelů je zde tedy brána jako vektor), N počet pixelů, L počet detektorů, ζ_i statistická a systematická chyba a T_{ij} vliv j -tého pixelu na signál f_i , což je právě prvek hledané transformační matice. Hodnoty prvků transformační matice jsou tedy úměrné vlivu jednotlivých pixelů tomografického obrazu na příslušný detektor, a lze je určit ze znalosti geometrie experimentu, přičemž je zanedbána rozbíhavost zorného pole detektoru, což je ale vzhledem k přesnosti metody přijatelné. Nalezením vhodného inverzního zobrazení k soustavě rovnic (1.1) pak lze vypočítat emisivitu měkkého rentgenového záření pro jednotlivé pixely. Přesnost tomografické rekonstrukce závisí jak na zvolené metodě řešení, tak na počtu detektorů a jejich uspořádání (z tzv. řezového teorému plyne, že pro dokonale přesný tomografický obraz je třeba měření z nekonečně mnoha směrů pokrývajících celý měřený objekt).

Úloha ovšem není triviální, protože některé detektory nemíří do tokamaku v rovině hledané emisivity měkkého rentgenového záření (tedy ve vertikální rovině procházející hlavní osou tokamaku), ale mírně šikmo. Díky symetrii tokamaku kolem hlavní osy (v toroidálním směru - viz obr. 1.1) se vertikální průřez plazmatu v různých místech téměř neliší a průhledy těchto detektorů lze tedy promítnout do požadované roviny. Průměty těchto průhledů jsou pak mírně zakřivené (viz obr 2.2). Vše je řešené s pomocí programu MATLAB.

Následující kapitola se věnuje uspořádání kamer pro tomografickou rekonstrukci měkkého rentgenového záření a zvolené metodě tomografické rekonstrukce. Třetí kapitola popisuje výpočet transformační matice. Ve čtvrté kapitole je pak vypočtená transformační matice testována.

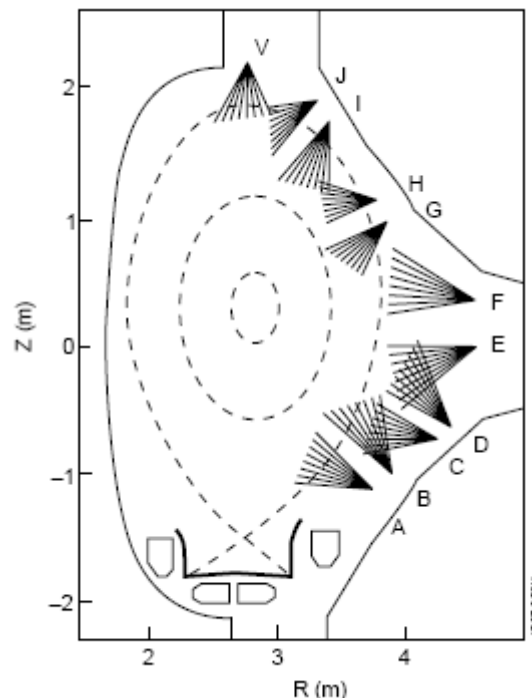


Obrázek 1.1: Základní pojmy toroidální geometrie. Převzato z [6].

2. Tomografie měkkého rentgenového záření na JET

2.1 Měření pro tomografii měkkého rentgenového záření na JET

Měkké rentgenové záření je na tokamaku JET měřeno z více různých kamer. Od roku 1995 pracovala na JET pro tomografii měkkého rentgenového záření soustava jedenácti kamer (viz obr. 2.1). Deset kamer (A až J) bylo seskupeno v párech, z nichž každý poskytoval téměř kompletní pohled do plazmatu. Každá z kamer A až J měřila měkké rentgenové záření z osmnácti směrů a horní kamera V z pětatřiceti, což dává dohromady 215 směrů. V roce 2004 byly kamery A, B, C, D, E, F vyjmuty kvůli přípravě nové ICRF (Ion Cyclotron Resonance Frequency) antény. Kamery A, B, C a D byly již značně radiačně poškozeny, takže jejich vyjmutí nepředstavovalo velkou ztrátu. Oproti tomu odstranění kamer E a F už mělo na tomografii měkkého rentgenového záření znatelnější dopad.



obrázek 2.1: Dřívější rozložení kamer pro tomografii měkkého rentgenového záření na JET. R představuje vzdálenost od hlavní osy tokamaku a z výšku. Převzato z [1].

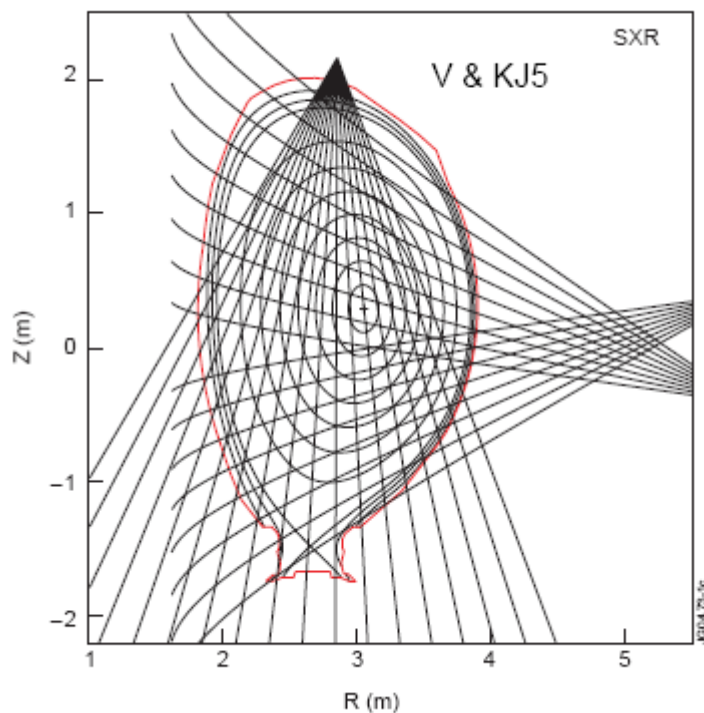
Tomografii měkkého rentgenového záření lze ještě provést např. pomocí kamery V a další kamery KJ5, která byla do tokamaku JET nainstalována pro sledování plazmatu při DT reakcích a pro poskytování signálů pro vertikální stabilizaci plazmatu. Kamera KJ5 měří měkké rentgenové záření pomocí sedmnácti detektorů v různých směrech. Detektory jsou rozděleny do dvou skupin: devět detektorů míří z dolní štěrbiny ve výšce $z_L = -408\text{mm}$ a osm detektorů z horní štěrbiny ve výšce $z_U = 414\text{mm}$ vzhledem k rovině procházející vedlejší osou tokamaku. Obě štěrbiny jsou ve vzdálenosti $R_{KJ5} = 5917,36\text{mm}$ od hlavní osy tokamaku. Směry jednotlivých detektorů shrnuje následující tabulka:

Tabulka 2.1: Směry detektorů kamery KJ5

	detektor	úhel [°]
Dolní štěrbina	1	28,395
	2	25,425
	3	22,455
	4	19,485
	5	16,515
	6	13,545
	7	10,575
	8	7,605
Horní štěrbina	9	-7,815
	10	-10,986
	11	-14,157
	12	-17,329
	13	-20,500
	14	-23,671
	15	-26,843
	16	-30,014
	17	-33,185

Poznámka: Úhly detektorů jsou vzhledem k vodorovné spojnici se středem tokamaku (detektory s kladnými úhly směřují nahoru, detektory se zápornými úhly dolů).

Zvláštností kamery KJ5 je, že z konstrukčních důvodů nemíří v rovině poloidálního průřezu (viz obr. 1.1), ale mírně šikmo pod úhlem $15,63^\circ$. Díky toroidální symetrii tokamaku se profil plazmatu v poloidálním průřezu v jednotlivých místech téměř nemění a je proto možné průhledy kamery KJ5 promítnout do požadované roviny poloidálního průřezu, čímž se průhledy detektorů kamery KJ5 mírně zakříví, jak ukazuje obrázek 2.2. V roce 2008 byly detektory č.1 a 2 a částečně detektor č. 3 zastíněny instalací nové TAE antény (Toroidal Alfvén Eigenmodes) pro měření vlastních módů Alfvénových vln.



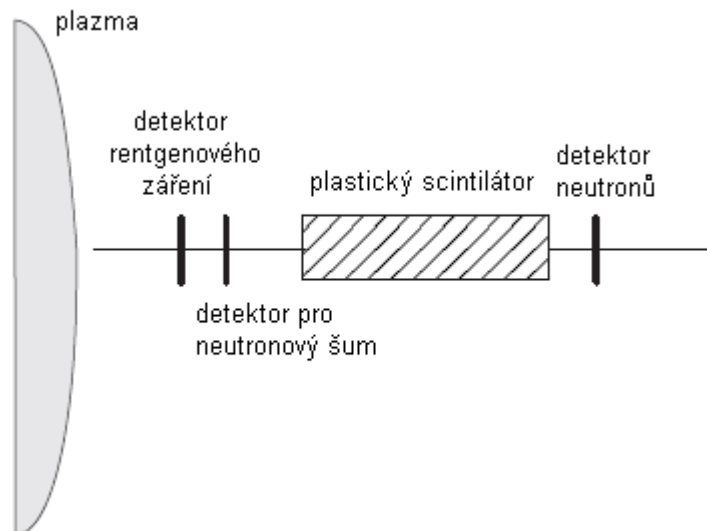
obrázek 2.2: Průhledy detektorů kamer V (nahore) a KJ5 (vpravo) do tokamaku. R představuje vzdálenost od hlavní osy tokamaku a z výšku nad plochou ležící ve vedlejší ose tokamaku (pro kameru V nejsou pro přehlednost vyobrazeny všechny průhledy). Převzato z [3].

Kamera KJ5 je radiačně chráněna barytovým betonem a míří do plazmatu přes okénko z berylia o tloušťce 350 μ m, které tak odděluje kameru od vnitřku tokamaku. Každý ze sedmnácti detektorů kamery KJ5 je složen z následujících prvků (viz obr. 2.3):

1) Křemíkový diodový detektor o velikosti 14x14mm (typ OSD196-OG(CER)). Detektor má stoprocentní účinnost pro záření s energií pod 10keV a velmi malou účinnost pro neutrony s energií 14MeV (tedy pro neutrony z D-T reakcí). Neutrony jsou původcem šumu v signálu.

2) Druhý křemíkový detektor stejného typu, který je využíván k měření šumu na pozadí signálu způsobeného neutrony.

3) Plastický scintilátor (Bicron BC 400) o délce 20cm a průměru 20mm, který má velkou účinnost pro detekci neutronů. Světlo emitované nabitými částicemi vzniklými při reakci neutronů s plastickým scintilátorem je následně detekováno třetím křemíkovým diodovým detektorem stejného typu.



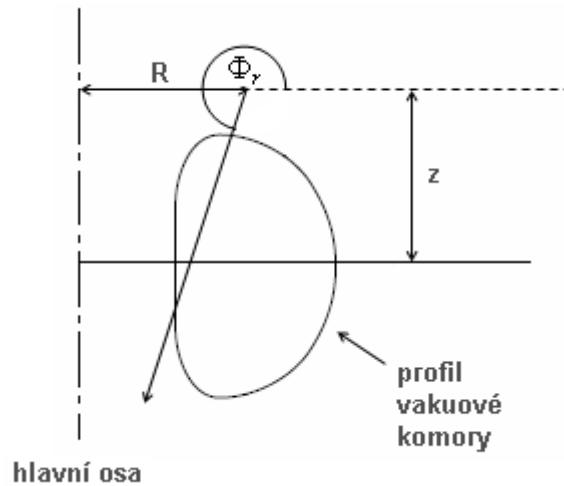
obrázek 2.3: Uspořádání detektorů kamery KJ5. Převzato z [4].

Kamera V s 35 průhledy míří do plazmatu přes okénko berylia tloušťky 250 μ m, což je rozdíl oproti 350 μ m u kamery KJ5, ale předpokládá se, že vliv na tomografii je vzhledem k její přesnosti zanedbatelný. Úhly jednotlivých průhledů (viz obr 2.4) lze popsat následujícím vztahem:

$$\Phi_r = \alpha + \gamma \cdot \tan^{-1} \left(\frac{(r-n) \cdot 0,99}{f} \right) \quad r = \hat{35}, \quad (2.1)$$

kde parametry α , γ , n a f nabývají hodnot: $\alpha = 265^\circ$, $\gamma = -1$, $n = 18$ a $f = 35,31\text{mm}$.

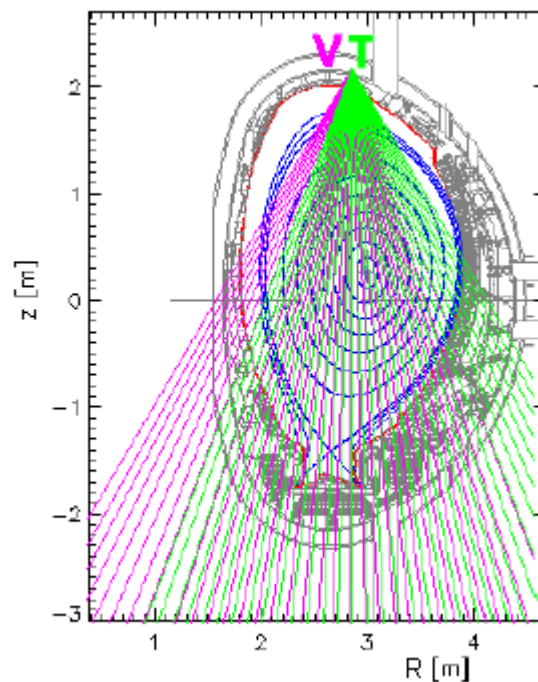
Štěrbina kamery V se nachází ve vzdálenosti $R_V = 2848\text{mm}$ od hlavní osy a ve výšce $z_V = 2172\text{mm}$.



obrázek 2.4: Znáornění úhlu Φ , pro jeden detektor kamery V.

Místo kamery V lze pro tomografii měkkého rentgenového záření spolu s kamerou KJ5 použít také kameru T, pro kterou kromě pootočení o 10° platí stejné parametry jako pro kameru V (viz obr 2.5). Kamery V a T mohou dát dohromady také celkem dobrý horizontální průřez plazmatem.

Data z kamery V jsou zaznamenávány s frekvencí 250kHz (platí i pro kameru T a kamery na obr. 2.1) a data z kamery KJ5 s frekvencí 500kHz.



obrázek 2.5: Průhledy kamer V a T v poloidálním průřezu tokamaku. Modře jsou vyznačeny také magnetické povrchy magnetického udržení plazmatu. Převzato z [3].

2.2. Tomografická rekonstrukce pomocí Tichonovovy regularizace omezené minimem Fisherovy informace

Dvourozměrný tomografický obraz lze rozložit na síť plošných elementů neboli pixelů. Na signál f_i (počet zachycených neutronů) z určitého směru se pak lze dívat jako na lineární kombinaci emisivity jednotlivých pixelů:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j + \zeta_i, \quad i \in \hat{L}, \quad (2.2)$$

kde g_j je řešení pro j -tý pixel (mřížka pixelů je zde tedy brána jako vektor), N počet pixelů, L počet detektorů, T_{ij} vliv j -tého pixelu na signál f_i a ζ_i statistická a systematická chyba. Zanedbáním rozbíhavosti zorného pole detektoru lze pro dostatečně úzké zorné pole vzít za hodnotu T_{ij} vzdálenost, s jakou i -tý detektor protne j -tý pixel. Řešení \mathbf{g} pak představuje jen tu část z emisivity pixelu, která míří do zorného úhlu směřujícího k danému detektoru a pro získání celkové emisivity pixelů je třeba řešení \mathbf{g} vynásobit příslušnými kalibračními konstantami.

Řešení určující vektor \mathbf{g} je možné buď hledat iterativně, nebo je třeba nalézt vhodnou zpětnou transformaci k soustavě rovnic (2.2). Tedy matici \mathbf{M} , pro kterou bude platit:

$$g_j = \sum_i^L M_{ji} f_i \quad (2.3)$$

Nabízí se možnost přímo vypočítat inverzní matici k transformační matici \mathbf{T} , jenže takový výpočet není zpravidla možný, protože matice \mathbf{T} nebývá čtvercová (počet neznámých g_j je větší než počet rovnic, úloha je nedostatečně určená) a navíc může být matice \mathbf{T} špatně podmíněná a inverzní matice \mathbf{T}^{-1} by tak byla příliš ovlivňována šumem vzniklým kvůli zanedbání chyb ζ_i .

Iterativní řešení určující vektor \mathbf{g} je hledáním minima výrazu:

$$\sum_i^L \left(f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j \right)^2. \quad (2.4)$$

Pro nedostatečně určenou obdélníkovou matici \mathbf{T} může ale existovat neomezený počet možných řešení \mathbf{g} (tj. \mathbf{g} pro které je výraz (2.4) roven nule) a je třeba vybrat takové, které je co nejbližší předpokládanému stavu. K výrazu (2.4) se proto přidává tzv. regularizační funkcionál, který závisí na zvolené metodě řešení \mathbf{g} . V praxi se pak hledá minimum funkcionálu¹:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \chi^2 + \lambda_R R, \quad (2.5)$$

tj. řešení \mathbf{g} vyplyne ze soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial g_j} = 0, \quad j \in \hat{N}, \quad (\text{viz dodatek B})$$

¹ Jedná se vlastně o metodu Lagrangeových multiplikátorů, kdy se hledá minimum funkce na určité přípustné množině.

kde R je regularizační funkcionál, $\chi^2 = \frac{1}{L} \sum_i \left(\frac{f_i - \sum_j T_{ij} g_j}{\sigma_i} \right)^2$, σ_i předpokládaná chyba dat v i -

tém detektoru (dělením σ_i se zaručuje, aby na hledání řešení měla menší vliv data s větší předpokládanou chybou) a λ_R regularizační parametr, který určuje váhu regularizačního funkcinálu na hledání řešení. Pro λ_R blízké nule je minimum Λ určeno především hodnotou χ^2 a naopak pro velká λ_R má na nalezení řešení velký vliv regularizační funkcionál R . Úlohou tedy není jen nalézt řešení \mathbf{g} ale také správnou hodnotu parametru λ_R .

Hodnota χ^2 se obvykle nehledá menší než 1, protože nemá smysl hledat řešení s odchylkou od naměřených dat menší než je předpokládaná chyba. V nedostatečně určených systémech se zpravidla stanovuje λ_R iterací tak, aby χ^2 bylo blízké jedné.

Vhodným regularizačním funkcionálem je např. Fisherova informace I_F , která je obecně pro pravděpodobnostní rozdělení $g(x)$ definována vztahem:

$$I_F = \int \frac{1}{g} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 dx$$

a souvisí také s rozptylem rozdělení σ^2 nerovností $\sigma^2 \geq 1/I_F$.

Minimalizací Fisherovy informace se tedy hledá rozdělení s největším rozptylem a vlastně jde o takové řešení, které je více hladké pro malé hodnoty $g(x)$ (jak plyne z g ve jmenovateli ve vztahu pro I_F) a méně pro velké hodnoty $g(x)$. Ve Fisherově informaci pro dvourozměrný tomografický obraz např. emisivity měkkého rentgenového záření lze také rozlišovat derivace podél a napříč magnetických siločar. Přidělením většího váhového faktoru k derivacím podél magnetických siločar pak při minimalizaci Fisherovy informace dochází k většímu shlazování hledané emisivity měkkého rentgenového záření podél magnetických siločar, což lépe odpovídá skutečnosti neboť vlastnosti plazmatu se podél magnetických siločar příliš nemění.

Touto metodou, zvanou Tichonovova regularizace omezená minimem Fisherovy informace, jsou řešeny všechny tomografické rekonstrukce v této práci, přičemž jsou řešení více shlazována podél magnetických siločar.

3. Výpočet transformační matice pro tomografii měkkého rentgenového záření

Prvky transformační matice T pro tomografii měkkého rentgenového záření jsou úměrné vlivu jednotlivých pixelů na příslušný detektor. Rozměr transformační matice je tedy počet detektorů krát počet pixelů (dvourozměrná mřížka pixelů je brána jako vektor). Kamera KJ5 se 17 detektory a kamera V s 35 detektory dávají dohromady 52 směrů, ze kterých je měkké rentgenové záření vycházející z plazmatu měřeno. Mřížka pixelů byla zvolena o velikosti 20x34 pixelů (celkem tedy 680 pixelů) o rozměrech 10x10cm. Transformační matice T má tedy rozměr 52×680 .

Tomografický obraz emisivity měkkého rentgenového záření zaujímá v tokamaku JET prostor (ve svislé rovině) od 197,2cm až do 397,2cm ve vzdálenosti od hlavní osy a ve výšce (tj. ve vzdálenosti od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu) od -145cm do 195cm.

Při zanedbání rozbíhavosti zorného pole detektorů se lze na průhledy detektorů dívat jako na přímky. Za prvky transformační matice T pro tomografii měkkého rentgenového záření, pro kterou platí vztah (1.1), lze pak vzít vzdálenosti, s jakými daný detektor protne příslušný pixel. K tomu je tedy třeba určit rovnice přímek průhledů jednotlivých detektorů, vypočítat jejich průsečíky s linkami mřížky pixelů (tj. s hranicemi pixelů) a následně každému pixelu přiřadit vzdálenost mezi průsečíky na jeho hranicích.

3.1 Výpočet pro kameru V

Úhly přímek průhledů jednotlivých detektorů Φ_r kamery V vyjadřuje vztah (2.1). Vzdálenost štěrbiny kamery V od hlavní osy je $R_V = 2848mm$ a nachází se ve výšce $z_V = 2172mm$ (nad rovinou procházející vedlejší osou tokamaku). Lze tedy určit soustavu rovnic přímek pro všech 35 detektorů:

$$z = m_r x + b_r \quad r = \overset{\wedge}{35}, \quad (3.1)$$

kde x je vzdálenost od hlavní osy, z výška nad vodorovnou rovinou procházející vedlejší osou tokamaku, stoupání přímek $m_r = \tan^{-1}(\Phi_r)$ a konstanta $b_r = z_V - R_V \cdot m_r$.

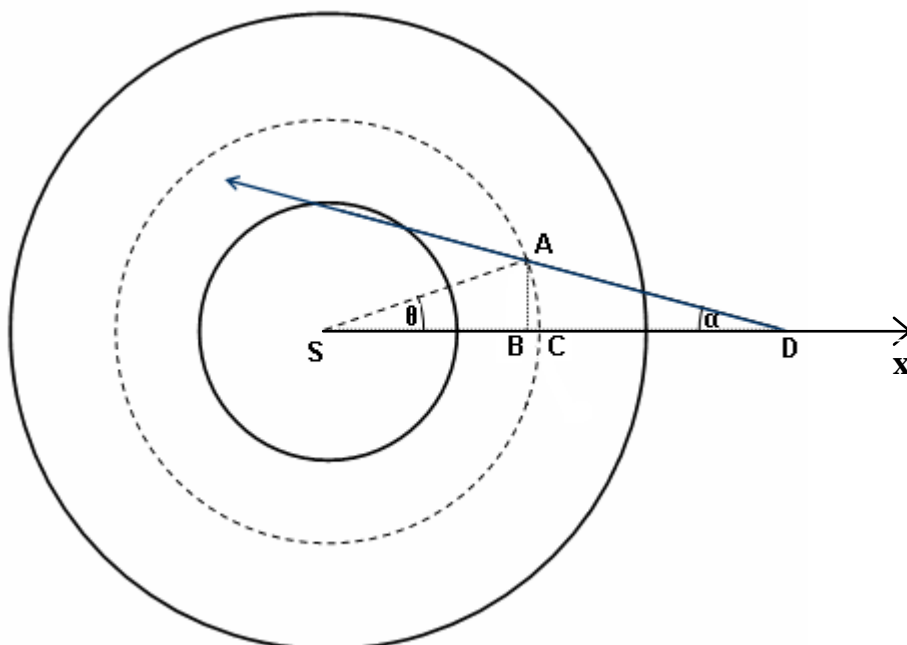
Průsečíky přímek s horizontálními linkami mřížky pixelů je možné nalézt dosazením výšek horizontálních linek za z_r a průsečíky s vertikálními linkami dosazením vzdáleností vertikálních linek od hlavní osy tokamaku za x_r do soustavy rovnic (3.1). Pro každý pixel pak je třeba určit, zda se průsečíky s vybranou přímkou detektoru nacházejí na jeho hranicích a pokud ano, přiřadit pixelu vzdálenost mezi nimi.

3.2 Výpočet pro kameru KJ5

Kamera KJ5 se nachází ve vzdálenosti $R_{KJ5} = 5917,36mm$ od hlavní osy tokamaku. Prvních osm detektorů míří z horní štěrbiny ve výšce $z_U = 414mm$ a zbylých devět z dolní štěrbiny ve výšce $z_L = -408mm$ vzhledem k rovině procházející vedlejší osou tokamaku. Úhly jednotlivých detektorů shrnuje tabulka 2.1.

V případě kamery KJ5 už není výpočet transformační matice tak prostý, protože detektory nemíří do tokamaku v rovině poloidálního průřezu ale šikmo pod úhlem $\alpha = 15,63^\circ$ (viz obr 3.1). Je tedy třeba průsečík přímky detektoru s horizontální nebo vertikální linkou

mřížky pixelů (viz bod A na obr 3.1) promítnout do roviny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření podle toroidální symetrie tokamaku (viz bod C na obr. 3.1), následně určit pro každý pixel, zda se průměty průsečíků nacházejí na jeho hranicích a případně danému pixelu přiřadit prostorovou vzdálenost mezi těmito průsečíky.



obrázek 3.1: Pohled shora na torus tokamaku. Bod D označuje obě štěrby, kterými detektory kamery KJ5 míří do tokamaku pod úhlem α . Hlavní osa tokamaku prochází bodem S. Modrá šipka znázorňuje směr kamery KJ5

Určení rovnic pro přímky detektorů

Z obr. 3.1 plyne, že pro výšku přímky detektoru v bodě A platí:

$$z_A = |AD| \cdot \tan(-\nu_r) + z_D = \frac{|BD|}{\cos(\alpha)} \tan(-\nu_r) + z_D,$$

kde ν_r jsou úhly detektorů vzhledem k vodorovné rovině (viz tab. 2.1) a z_D výška přímky v bodě D.

Protože $|SD| = R_{KJ5}$, lze soustavu rovnic přímek detektorů napsat ve tvaru:

$$z = \frac{R_{KJ5} - x}{\cos(\alpha)} m_r + z_{U,L}, \quad r = \hat{17}, \quad (3.2)$$

kde r je číslo detektoru, x je souřadnice ve vodorovné rovině (viz obr. 3.1), z výška nad vodorovnou rovinou procházející vedlejší osou tokamaku, stoupání přímek $m_r = -\tan^{-1}(\nu_r)$ a $z_{U,L}$ výška horní nebo dolní štěrby kamery KJ5.

Výpočet průsečíků přímek detektorů s horizontálními linkami mřížky pixelů

Protne-li přímka detektoru vodorovnou rovinu ve výšce k-té horizontální linky mřížky pixelů, plyne ze soustavy rovnic (3.2) pro souřadnici x průsečíku:

$$x_{rk} = R_{KJ5} - \frac{z_k - z_{U,L}}{m_r} \cos(\alpha).$$

Pro souřadnici x průmětu průsečíku do roviny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření (tedy po pootočení bodu A o úhel θ do bodu C) pak platí:

$$x'_{rk} = \frac{x_{rk}}{\cos(\Theta_{rk})},$$

kde

$$\Theta_{rk} = \tan^{-1} \left(\frac{(R_{KJ5} - x_{rk}) \tan(\alpha)}{x_{rk}} \right).$$

Souřadnice průsečíku přímky r-tého detektoru s k-tou horizontální linkou mřížky pixelů v rovině hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření tedy jsou:

$$[x'_{rk}, z_k],$$

kde z_k je výška k-té horizontální linky.

Výpočet průsečíků přímek detektorů s vertikálními linkami mřížky pixelů

Díky toroidální symetrii tokamaku si lze představit, že vertikální linka mřížky pixelů opisuje vertikální válec s osou v hlavní ose tokamaku. Protne-li pak přímka detektoru tento válec v bodě A (viz obr 3.1), odpovídá souřadnice x průmětu průsečíku do roviny hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření již nadefinované vzdálenosti příslušné vertikální linky mřížky pixelů od hlavní osy.

Pro výpočet výšky průsečíku je nejprve třeba určit vzdálenost mezi body A a D (tj. průmět vzdálenosti mezi průsečíkem a šterbinou kamery KJ5 do vodorovné roviny). Z kosinové věty plyne:

$$|SB|^2 = |SD|^2 + |BD|^2 - 2 \cos(\alpha) \cdot |SD| \cdot |BD|,$$

což je kvadratická rovnice, ze které s přihlédnutím k obr. 3.1 plyne:

$$|BD| = \cos(\alpha) |SD| - \sqrt{(\cos(\alpha) \cdot |SD|)^2 - |SD|^2 + |SB|^2},$$

neboli v obecném případě:

$$s_l = \cos(\alpha) R_{KJ5} - \sqrt{(\cos(\alpha) \cdot R_{KJ5})^2 - R_{KJ5}^2 + x_l^2} \quad (3.3)$$

kde s_l je tedy průmět vzdáleností mezi šterbinou kamery KJ5 a průsečíkem přímky detektoru s l-tou vertikální linkou do vodorovné roviny (platí pro všech 17 detektorů) a x_l vzdálenost vertikální linky mřížky pixelů od hlavní osy.

Pro výšku průsečíku přímky r-tého detektoru s l-tou vertikální linkou mřížky pixelů pak platí:

$$z_{rl} = s_l m_r + z_{U,D}. \quad (3.4)$$

Souřadnice průsečíku přímky r-tého detektoru s l-tou vertikální linkou v rovině hledaného profilu emisivity měkkého rentgenového záření tedy jsou:

$$[x_l, z_{rl}].$$

Výpočet vzdáleností mezi průsečíky přímky detektoru s hranicemi pixelu

Protne-li přímka určitého detektoru hranice pixelu, platí pro vzdálenost mezi průsečíky označené a , b :

$$d_{ab} = \sqrt{(|AD|_a - |AD|_b)^2 + (z_a - z_b)^2},$$

neboli

$$d_{ab} = \sqrt{(s_a - s_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

kde s_a , s_b jsou průměty vzdáleností bodů a a b od štěrbiny detektoru do vodorovné roviny a z_a , z_b výšky bodů a a b nad rovinou procházející vedlejší osou tokamaku.

V případě průsečíku přímky detektoru s vertikální hranicí pixelu je s_a , resp. s_b určena příslušným vztahem v soustavě rovnic (3.3) a z_a resp. z_b příslušným vztahem v soustavě rovnic (3.4).

V případě průsečíku s horizontální hranicí je

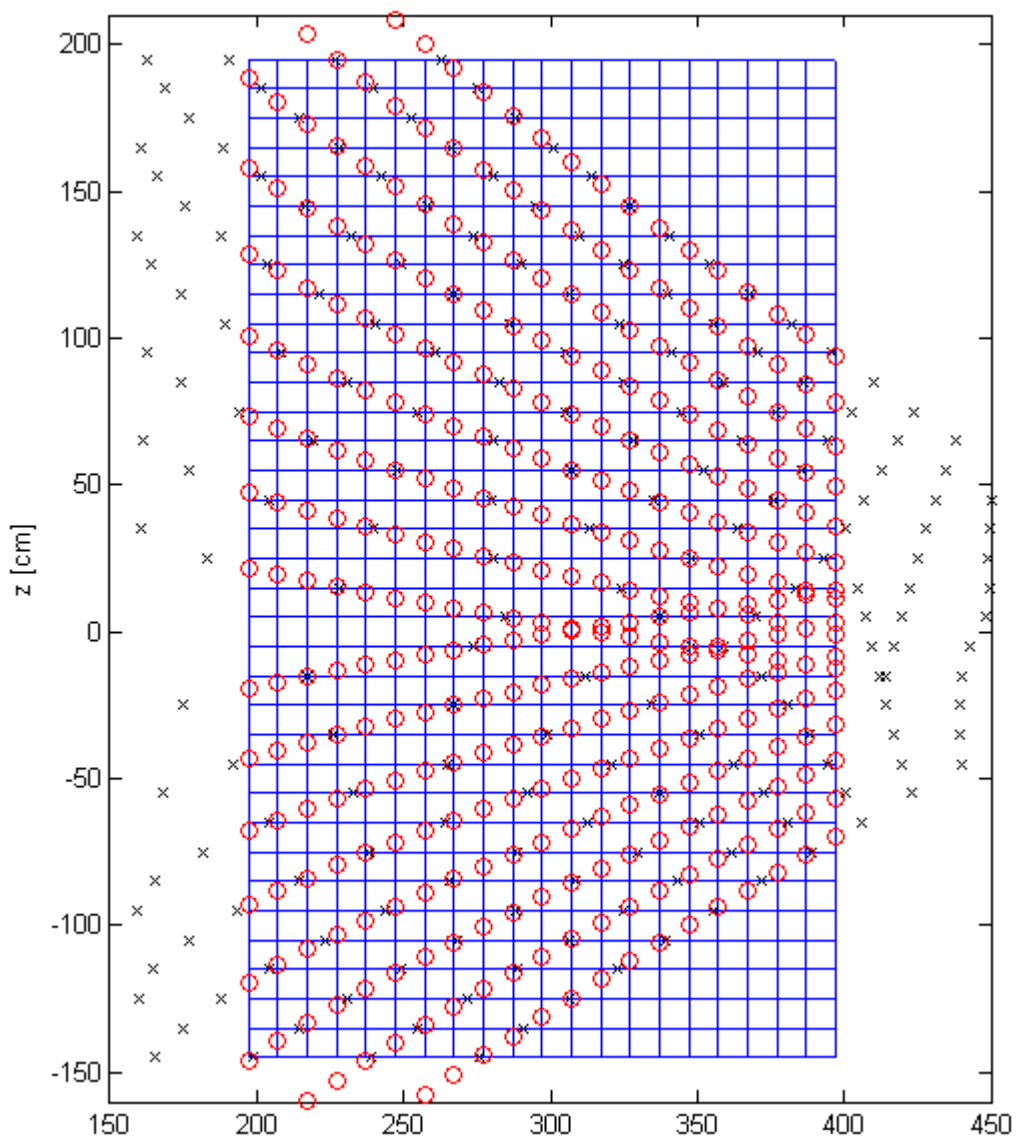
$$s_{a,b} = \frac{R_{KJ5} - x_{a,b}}{\cos(\alpha)},$$

kde $x_{a,b}$ je x-ová souřadnice průsečíku a nebo b a z_a resp. z_b je rovna výšce příslušné horizontální hranice pixelu.

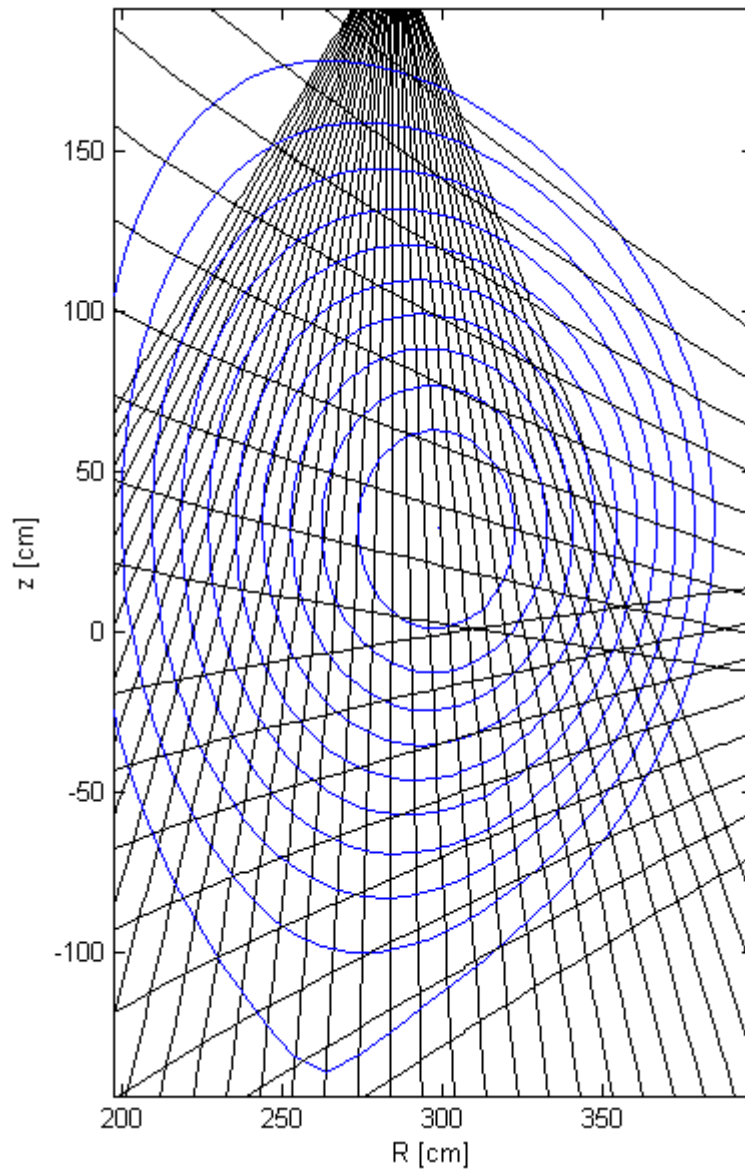
4. Testování vypočtené transformační matice

4.1. Grafické ověření

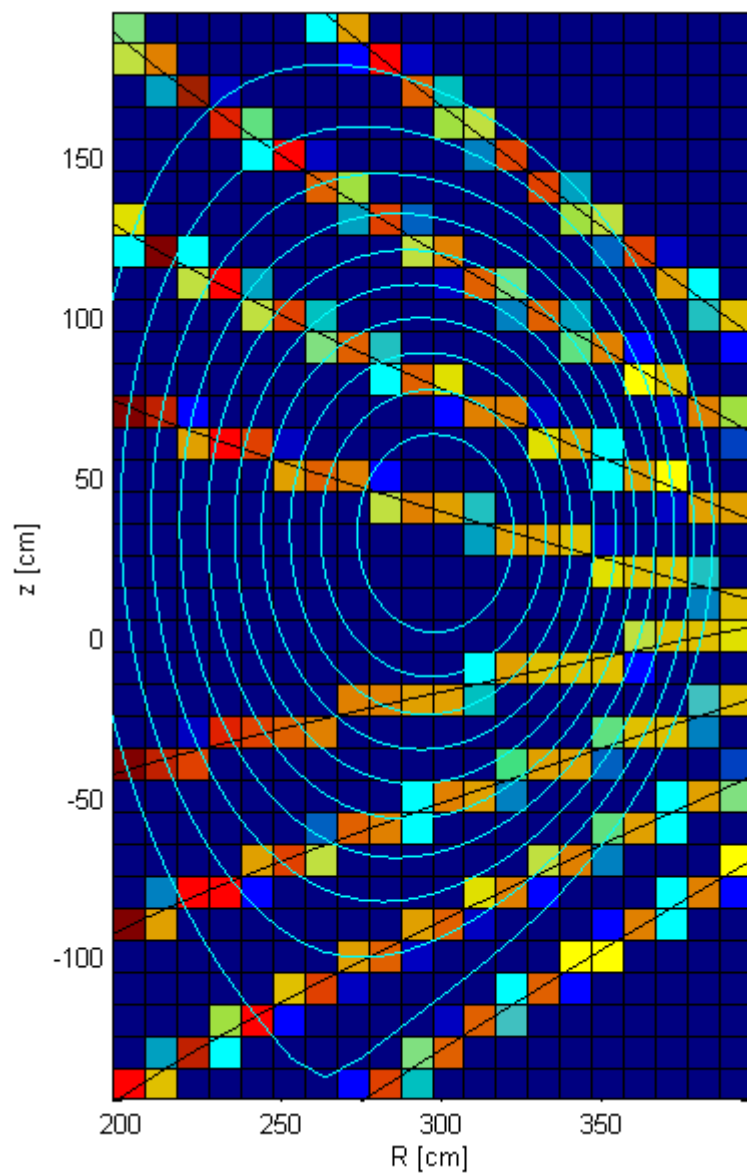
Vypočtenou transformační matici lze ověřit nejprve graficky. Na obrázku 4.1 jsou vyobrazeny průsečíky přímek detektorů kamery KJ5 s linkami mřížky. Vyobrazené polohy průsečíků odpovídají očekávanému rozložení (viz obr. 2.2). Obdobně spojnice průsečíků přímek detektorů kamery V a KJ5 s linkami mřížky vyobrazené na obrázku 4.2 odpovídají očekávaným průběhům (viz obr. 2.2 a 2.5). Na obr. 4.3 a 4.4 je možné vidět barevně vyznačený vliv pixelů na vybrané detektory kamery KJ5 a V spolu s přímkami detektorů a magnetickými povrchy magnetického udržení plazmatu. Ani jeden z obrázků 4.1 až 4.4 nenasvědčuje, že by došlo při výpočtu matice k chybě.



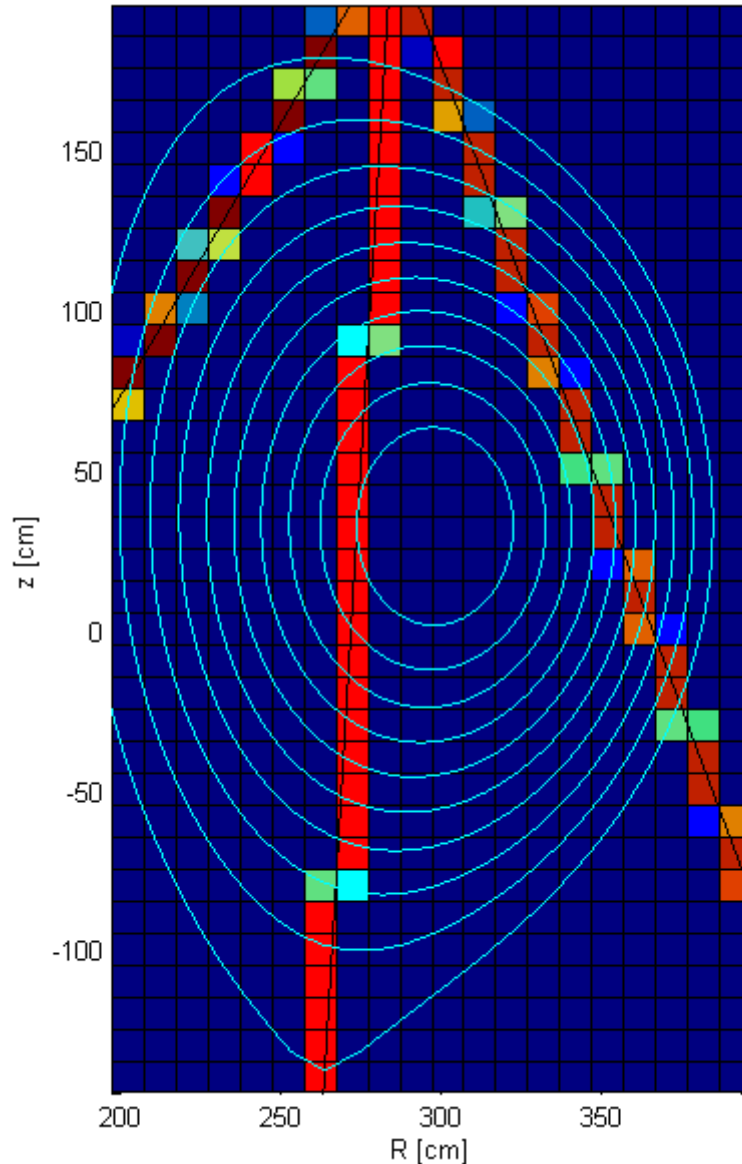
obrázek 4.1.: Průsečíky přímek detektorů kamery KJ5 s linkami mřížky pixelů. Červaná kolečka znázorňují průsečíky s vertikálními linkami mřížky a černé křížky průsečíky s horizontálními linkami.



obrázek 4.2: Přímký detektorů kamery KJ5 a V (černě) a magnetické povrchy (modře) v prostoru vymezeném zvolenou mřížkou pixelů.



obrázek 4.3.: Barevné vyznačení vlivu pixelů na vybrané detektory kamery KJ5 (jedná se o detektory číslo 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15 a 17). Světle modře jsou vyznačeny magnetické povrchy magnetického udržení plazmatu.



obrázek 4.4: Barevné vyznačení vlivu pixelů na vybrané detektory kamery V (jedná se o detektory číslo 1, 17 a 35). Světle modře jsou vyznačeny magnetické povrchy magnetického udržení plazmatu.

4.2. Tomografické rekonstrukce při vypočtené transformační matici

4.2.1 Tomografické rekonstrukce předem známé modelové funkce

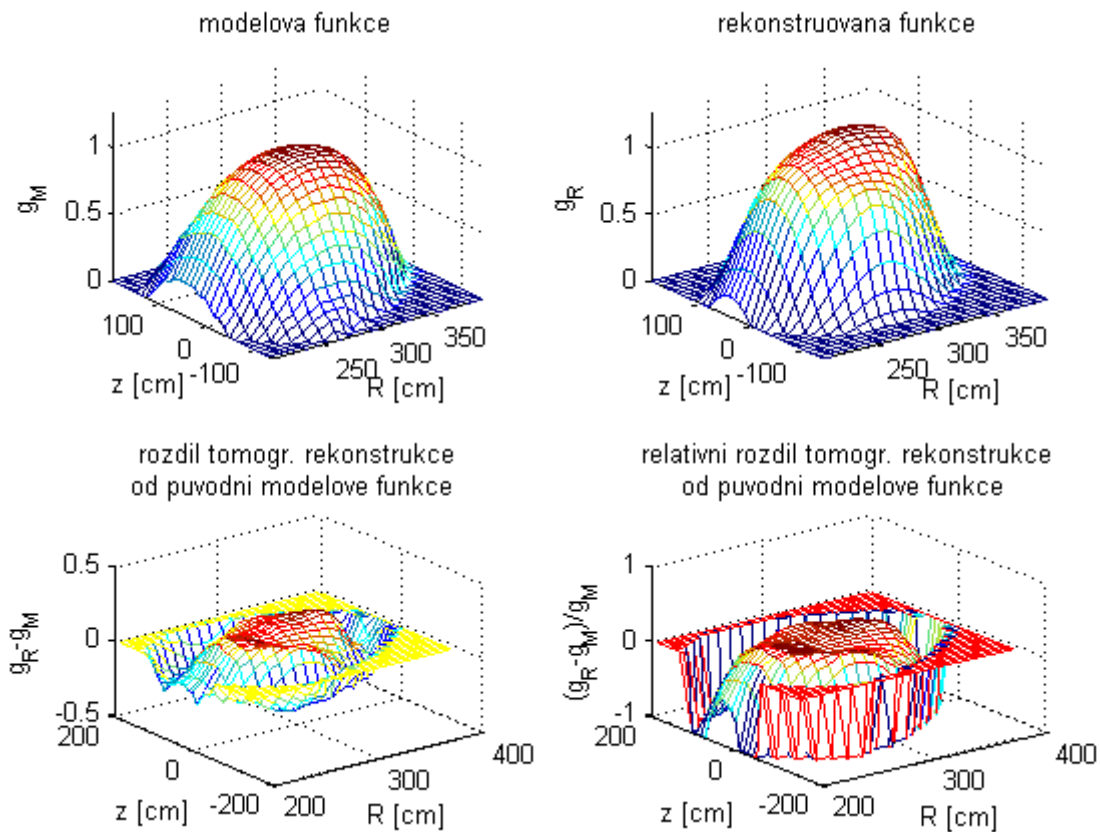
Porovnáním předem známé modelové funkce s její tomografickou rekonstrukcí lze získat určitou představu o přesnosti zvolené tomografické metody a vhodnosti uspořádání detektorů. Z modelové funkce jsou pomocí transformační matice vypočteny hodnoty signálů v detektorech:

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j, \quad i \in \hat{L},$$

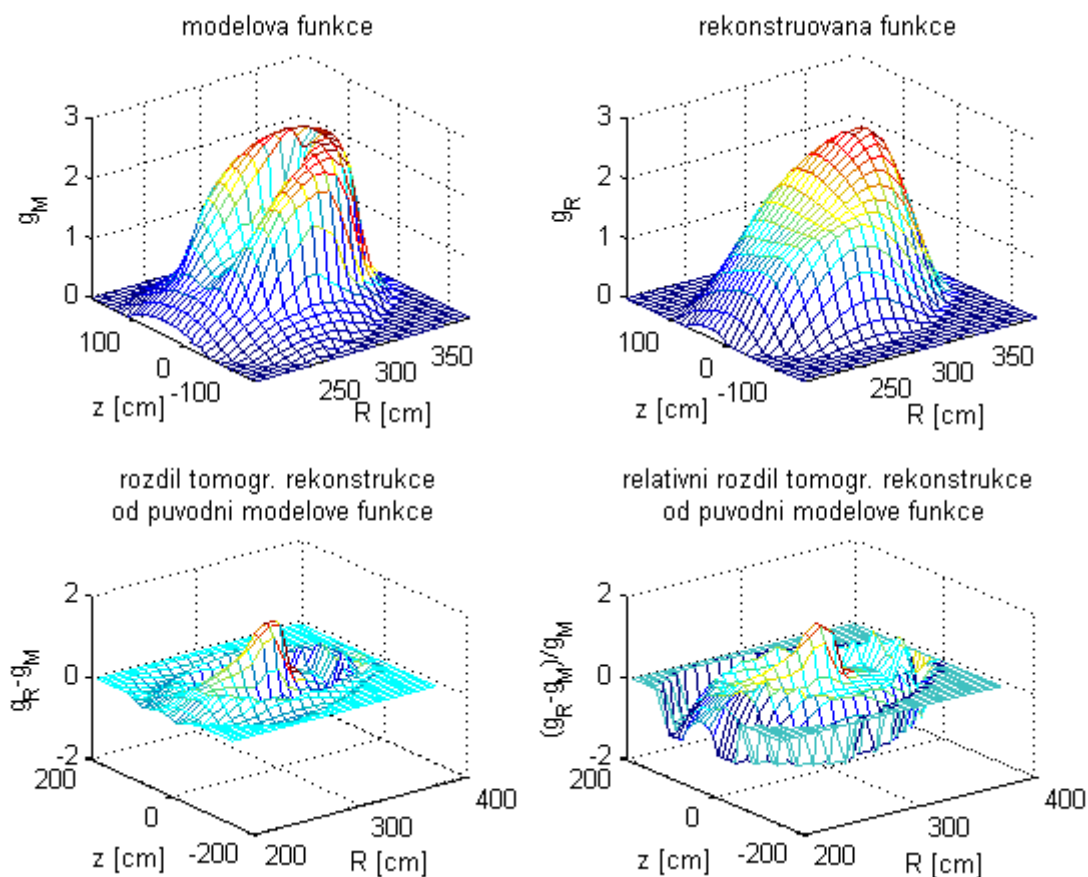
kde g_j je hodnota modelové funkce v j -tém pixelu (mřížka pixelů je zde brána jako vektor), N počet pixelů, L počet detektorů, T_{ij} prvek transformační matice a následně je zpětně z těchto

hodnot v detektorech (f_i) rekonstruován tomografický obraz pomocí Tikhonovy regularizace omezené minimem Fisherovy informace (viz kapitola 2.2) se shlazováním podél magnetických siločar (výpočet je závislý na stejné transformační matici T a proto i pro chybně vypočtenou transformační matici, která neodpovídá skutečnému uspořádání detektorů, může tomografická rekonstrukce modelové funkce velmi dobře odpovídat původní modelové funkci).

Určitou představu o přesnosti tomografické rekonstrukce měkkého rentgenového záření lze získat z obrázků 4.5 a 4.6, ve kterých byla použita modelová funkce s deseti časovými kroky popsaná v dodatku A.



obrázek 4.5: Modelová funkce (g_M), tomografická rekonstrukce (g_R), jejich rozdíl a relativní odchylka pro nulý časový krok modelové funkce (viz dodatek A).



obrázek 4.5: Modelová funkce (g_M), tomografická rekonstrukce (g_R), jejich rozdíl a relativní odchylka pro desátý časový krok modelové funkce (viz dodatek A)

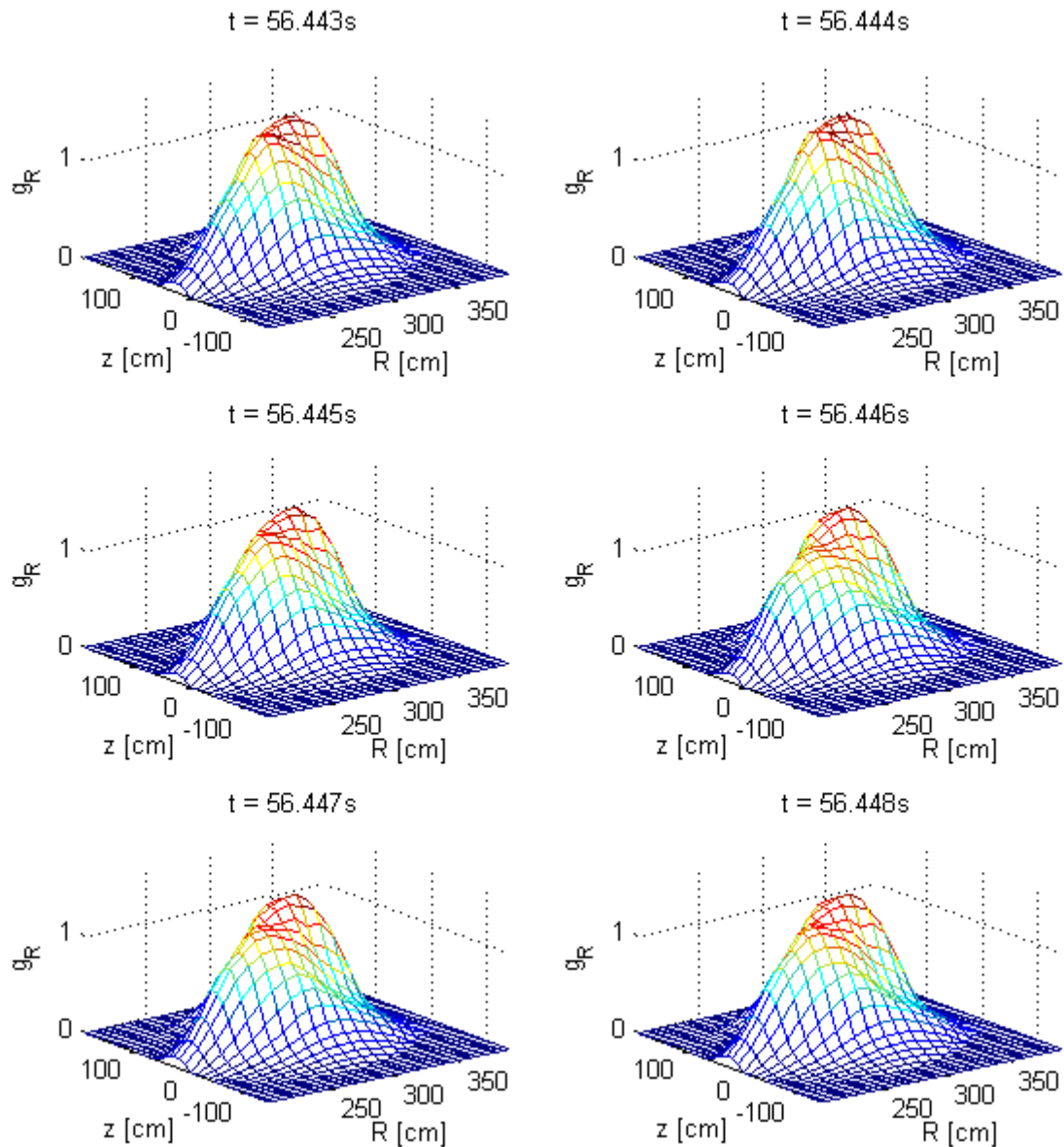
Z obrázků 4.5 a 4.6 je patrné, že tomografická rekonstrukce přibližně odpovídá původní modelové funkci, jen je o něco hladší.

Průměrná absolutní odchylka všech nenulových hodnot tomografické rekonstrukce od původní modelové funkce se v tomto případě pohybovala kolem 10% z maxima modelové funkce (a zhruba kolem 20% z průměru z nenulových hodnot modelové funkce). V případě obrázku 4.6, který se zabývá modelovou funkcí v 10. časovém kroku je absolutní odchylka největší uprostřed tomografického obrazu (přibližně 36% z maxima modelové funkce), kde dochází v důsledku tvaru modelové funkce k největšímu shlazování.

Průměr relativních odchylek rekonstruované funkce od původní dosahoval až 40%, což je dáno především vysokými relativními odchylkami na okrajích, kde má modelová funkce nejnižší hodnoty. Uprostřed tomografického obrazu nabývá relativní odchylka většinou hodnot kolem 15%.

4.2.2. Tomografické rekonstrukce ze skutečných dat naměřených na JET

Na obrázku 4.7 je možné vidět tomografické rekonstrukce měkkého rentgenového záření z pulzu č. 65942 na tokamaku JET. V průběhu pulzu byl do plazmatu nárazově přidán zirkon, což se projevilo změnou rekonstruované funkce v čase $t = 56,446s$ od vpuštění proudu do cívek tokamaku (k zažehnutí plazmatu dochází zhruba o 40s později).

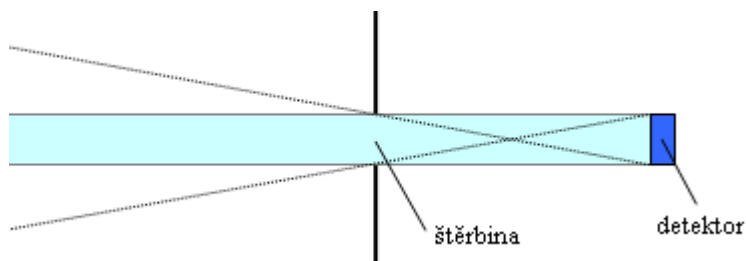


obrázek 4.7 : Tomografické rekonstrukce měkkého rentgenového záření na tokamaku JET ve vybraných časech (jedná se o pulz číslo 65942).

5. Diskuze

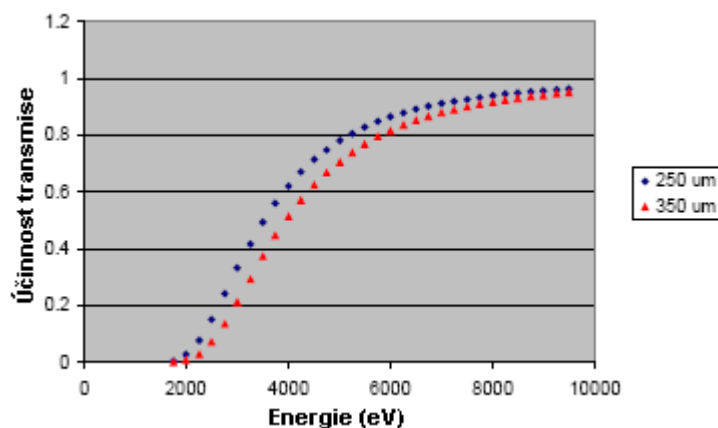
Výpočet transformační matice je spojený s mnoha zjednodušeními, u kterých se očekává, že budou mít na celkovou přesnost tomografické rekonstrukce zanedbatelný vliv. K získání ucelené představy o problematice tomografie měkkého rentgenového záření může být přesto užitečné si tato zjednodušení shrnout:

1) Na průhledy detektorů do tokamaku je nahlíženo jako na přímky a je tedy zanedbána rozbíhavost zorných polí detektorů (viz obr. 5.1). Např. u kamery KJ5 je velikost štěrbiny 14x14mm, plocha detektoru také 14x14mm a vzdálenost mezi štěrbinou a detektorem téměř 800mm, což dává šířku zorného pole detektoru na druhém konci tomografického obrazu o velikosti zhruba 15cm. Při zvolené velikosti pixelu 10x10cm se dá očekávat spíše malý vliv (ve srovnání s celkovou přesností tomografické rekonstrukce) zanedbání rozbíhavosti zorných polí detektorů na přesnost tomografické rekonstrukce. Zorné pole detektorů se rozšiřuje s kvadrátem vzdálenosti a intenzita záření s kvadrátem vzdálenosti klesá.



obrázek 5.1: Zorné pole detektoru procházející štěrbinou

2) Je zanedbána rozdílná tloušťka okének (350 μ m pro kameru KJ5 a 250 μ m pro kameru V), kterými detektory míří do vnitřku tokamaku (z obr. 5.2 plyne posun zhruba o 400eV mezi účinnostmi transmise).



obrázek 5.2: Účinnost transmise pro beryliový filtr (červeně pro tloušťku 350 μ m, modře pro 250 μ m). Převzato z [3].

Další nepřesnosti jsou pak při tomografické rekonstrukci způsobeny omezeným počtem směrů (52), ze kterých je měkké rentgenové záření měřeno, přesností Tichonovovy regularizace, šumem v detektorech, radiačním poškozením detektorů apod.

6. Závěr

Vypočtená transformační matice pro tomografii měkkého rentgenového záření pomocí kamer KJ5 a V na tokamaku JET odpovídá očekávání (viz obr. 4.1 až 4.4).

Tomografické rekonstrukce zvolené modelové funkce pomocí Tichonovovy regularizace omezené minimem Fisherovy informace jsou hladší než původní modelová funkce, vykazují relativní odchylku v průměru zhruba 40% z nenulových hodnot modelové funkce (což je dáno hlavně velkými relativními odchylkami na okrajích plazmatu, uprostřed tomografického obrazu se relativní odchylka pohybuje kolem 15%).

U tomografické rekonstrukce měkkého rentgenového záření ze skutečných hodnot naměřených v pulzu č. 65942 na tokamaku JET je patrná změna v čase $t = 56,446s$ od vpuštění proudu do cívek tokamaku (k zažehnutí plazmatu dochází zhruba o 40s později) způsobená nárazovým přidáním zirkonu do plazmatu.

Literatura:

- [1] Ingesson L.C. et al.: *Soft X Ray tomography during ELMs and Impurity Injection in JET*, Nuclear Fusion Vol 38, No 11 (1998)
- [2] Anton M. et al: *X-ray tomography on the TCV tokamak*, Plasma Phys Control. Fusion 38 (1996)
- [3] Barry Alper: *Status of SXR Diagnostics in 2007/8*
- [4] R D Gill, B Alper, A W Edwards: *First results in D-T from the Radiation Hardened Soft X-Ray Cameras*, JET Joint Undertaking, abingdon, Oxfordshire, OX14 3EA, UK
(dostupné online na <http://www.iop.org/Jet/fulltext/JETR97011.pdf>)
- [5] M. Anton et al., *X-ray tomography on the TCV tokamak*, Plasma Phys. Control. Fusion 38 (1996) 1849-1878
- [6] J. Mlynář: ITER: Cesta ke zvládnutí řízené termonukleární fúze, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 49 (2004) str. 129-150, (dostupné na <http://www.ipp.cas.cz/Tokamak/cz>)
- [7]. M. Imříšek, *Studium transformace chyb v tomografii fúzních neutronů*, FJFI ČVUT, 2008 (bakalářská práce)

Dodatek A - Použitá modelová funkce

Je vhodné, aby se modelová funkce podobala skutečnému profilu emisivity neutronů. Dobrý odhad takové modelové funkce lze získat uvážením poloidálního průřezu teploty a hustoty částic v plazmatu. Nabitě částice obíhají podél magnetických siločar (viz obr. 2.4). Magnetické pole je přitom silnější blíže k hlavní ose (středu tokamaku) a tak jsou nabitě částice s menší rychlostí podél magnetického pole odvraceny zpět do oblasti s menším magnetickým polem (takovým trajektoriím se podle jejich tvaru říká banánové orbity).

Vhodnou modelovou funkcí může být např. funkce:

$$g(r, R(r), \mathcal{G}) = 1 - r^b + a(1 + \cos(\pi R^m))(1 + \cos(\mathcal{G}^p \pi)),$$

kde parametr b je exponent základního profilu, a amplituda a m, p exponenty té části profilu, která je způsobena banánovými orbitami, r je vzdálenost od vedlejší osy plazmatu (viz obr. 1.5) normovaná na interval $\langle 0, 1 \rangle$, $R(r)$ je transformace r , která rovnoměrně převede vymezený interval $\langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle$ (tj. interval r , ve kterém jsou simulovány částice s banánovými orbitami) do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a za hodnoty r mimo vymezený interval dosadí příslušné krajní hodnoty intervalu $\langle -1, 1 \rangle$:

$$R = \begin{cases} 2 \frac{r - r_{MAX}}{r_{MAX} - r_{MIN}} + 1 & , \text{pro } r \in \langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle \\ 1 & , \text{pro } r > r_{MAX} \\ -1 & , \text{pro } r < r_{MIN} \end{cases}$$

(jak se lze přesvědčit dosazením r_{MAX} a r_{MIN} za r), \mathcal{G} je násobek úhlu rovnoměrně přetransformovaný z poloidálního úhlu φ tak, aby interval $\langle -\varphi_{MIN}, \varphi_{MAX} \rangle$ (tj. interval poloidálního úhlu, ve kterém se pohybují částice s banánovými orbitami) patřil do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (celkový úhel $\mathcal{G}^p \pi$ v posledním argumentu vztahu (2.12) pak probíhá v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$):

$$\mathcal{G} = 2 \frac{\varphi - \varphi_{MAX}}{\varphi_{MAX} - \varphi_{MIN}} + 1.$$

Užitá modelová funkce je modelována s časovým vývojem o deseti krocích s parametry:

$$b = 3, \quad m = 2, \quad r_{MIN} = 0,1, \quad r_{MAX} = 0,8, \quad p = 2, \\ \varphi_{MAX} = \pi, \quad \varphi_{MIN} = -\pi, \quad a(t) = 0 + 0,05(t-1), \quad (2.13)$$

kde t je index času.

Dodatek B - Tichonovova regularizace omezená minimem Fisherovy informace (řešení)

Jednou z nejpoužívanějších metod, která se snaží nalézt vhodné řešení k soustavě rovnic (2.2) je tzv. Tichonovova regularizace. Tu lze dále omezit minimem Fisherovy informace (Minimum Fisher Regularization - dále jen MFR), která byla poprvé popsána v [5]. Řešení se hledá minimalizací funkcionálu:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2} \chi^2 + \lambda_R I_F.$$

Regularizačním funkcionálem je zde Fisherova informace I_F . Obecně je pro pravděpodobnostní rozdělení $g(x)$ definována vztahem

$$I_F = \int \frac{1}{g} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 dx$$

a souvisí také s rozptylem rozdělení σ^2 nerovností $\sigma^2 \geq 1/I_F$.

Minimalizací Fisherovy informace se tedy hledá rozdělení s největším rozptylem a vlastně jde o takové řešení, které je více hladké pro malé hodnoty $g(x)$ (jak plyne z g ve jmenovateli ve vztahu pro I_F) a méně pro velké hodnoty $g(x)$.

Minimum Λ_{MF} lze nalézt řešením soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_j} = 0, \quad j \in \hat{N}.$$

Fisherovu informaci lze pro vektor g přepsat na tvar:

$$I_F = \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} \frac{1}{g_j} B_{jl} g_l = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \mathbf{g}^T \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g},$$

kde matice \mathbf{B} reprezentuje operátor numerických derivací vektoru \mathbf{g}^2 a pro matici \mathbf{W} platí: $W_{ij} = \delta_{ij} / g_j$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta.

Funkcionál Λ_{MF} pak má tvar:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2} \sum_i^L \left(\tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right)^2 + \alpha_R \sum_{i,j,k,l} g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g})^T (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g}) + \alpha_R \mathbf{g}^T \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g},$$

kde $\tilde{T}_{ij} = T_{ij} / \sigma_i$, $\tilde{f}_i = f_i / \sigma_i$.

Derivace takového funkcionálu Λ_{MF} podle jednotlivých složek vektoru \mathbf{g} by však vedly k nelineárním rovnicím, a tak se v případě Tichonovovy regularizace řešení zjednodušuje lineárním přiblížením. Za matici \mathbf{W} se nejprve zvolí jednotková matice. Výsledkem derivací Λ_{MF} podle jednotlivých složek vektoru \mathbf{g} jsou pak lineární rovnice, které se vyřeší vzhledem k vektoru \mathbf{g} :

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \left(\left(\tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right) \cdot (-\tilde{T}_{ir}) \right) + \alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l + \alpha_R \sum_{i,j,k} g_k B_{kj} W_{ji} B_{ir} = 0, \quad r \in \hat{N},$$

² Matice \mathbf{B} je tvořena takovými členy (např. $\pm 1/\Delta x$, kde Δx představuje velikost pixelů), aby Fisherova informace obsahovala všechny potřebné numerické derivace vektoru g .

což lze zjednodušit do tvaru:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \tilde{f}_i + 2\alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l = 0, \quad r \in \hat{N},$$

neboť matice $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$ je symetrická.

Derivace Λ_{MF} podle složek vektoru \mathbf{g} tedy vedou k soustavě rovnic:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_1} \\ \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_N} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}} + 2\alpha_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g} = 0$$

a pro vektor \mathbf{g} pak plyne vztah:

$$\mathbf{g} = (\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{kde } \lambda_R = 2\alpha_R \quad (\text{C.1})$$

V následujících krocích pak v těchto rovnicích obsahuje matice \mathbf{W} předchozí řešení vektoru \mathbf{g} a řešení \mathbf{g} se tedy hledá iteračně:

$$\mathbf{g}^{(n+1)} = (\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{kde } n \text{ je počet vykonaných kroků a } W_{ij} = \delta_{ij} / g_j^{(n)}.$$

Ukazuje se, že takový postup velmi rychle konverguje (stačí 2 nebo 3 cykly) ke správnému řešení.

V dvourozměrném případě může mít pak vztah (C.1) tvar:

$$\mathbf{g} = (\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}_X^T \mathbf{W} \mathbf{B}_X + \lambda_R \mathbf{B}_Y^T \mathbf{W} \mathbf{B}_Y)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}},$$

kde \mathbf{B}_X reprezentuje operátor numerických derivací vektoru \mathbf{g} podle souřadnice x a \mathbf{B}_Y podle souřadnice Y .

Plazma obvykle příliš nemění své vlastnosti ve směru magnetického pole a proto je výhodné sledovat derivace např. emisivity neutronů podél a napříč magnetických siločar:

$$\mathbf{g} = \left(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \left(\frac{1}{\eta} \mathbf{B}_{par}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{par} + \eta \mathbf{B}_{perp}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{perp} \right) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}},$$

kde \mathbf{B}_{par} reprezentuje operátor numerických derivací ve směru magnetických siločar, \mathbf{B}_{perp} napříč magnetických siločar a parametr η určuje jejich vzájemnou váhu. Např. pro $\eta < 1$ mají ve Fisherově informaci větší váhu derivace podél magnetických siločar a proto se při minimalizaci Fisherovy informace vyhlazují hodnoty \mathbf{g} více podél směru magnetického pole než v příčném směru. Obvykle se tvar magnetického pole určí jednou na začátku měření a v dalších časových krocích se předpokládá zanedbatelná změna tvaru magnetického pole vzhledem k přesnosti tomografické rekonstrukce.