

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Fyzikální inženýrství

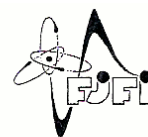
Zaměření: Fyzika a technika termojaderné fúze



Tomografie měkkého rentgenového záření
pro řízení tokamaku v reálném čase
Soft X-ray tomography for the real time control
of tokamak experiments

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Viktor Löffelmann
Vedoucí práce: RNDr. Jan Mlynář, Ph.D.
Rok: 2012



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2011/12

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Posluchač: Viktor Löffelmann

Obor: Fyzikální inženýrství

Zaměření: Fyzika a technika termojaderné fúze

Název práce: Tomografie měkkého rentgenového záření pro řízení tokamaku v reálném čase

Název práce: Soft X-ray tomography for the real-time control of tokamak experiments
(anglicky)

Osnova:

Stávající algoritmy pro tomografii fúzního plazmatu poskytují spolehlivé rekonstrukce prostorového rozdělení vyzařování plazmatu z měření jeho projekcí. Prostorové rozlišení je sice silně omezené nízkým počtem měřených směrů, zato je výborné časové rozlišení. Dosažená odolnost proti artefaktům spolu s rostoucí rychlostí výpočetní techniky vedou k četným úvahám o využití tomografie plazmatu k jeho zpětnovazebnímu řízení. Zejména atraktivní se jeví využití tomografie měkkého rentgenového záření ke zvýšení spolehlivosti měření polohy plazmatu.

Cílem bakalářské práce bude navrhnout a otestovat úpravu algoritmu pro tomografickou inverzi tak, aby byl vhodný pro výpočet v reálném čase. Algoritmus bude plně vycházet ze spolehlivého a široce využívaného algoritmu Tichonovovy regularizace, který je součástí balíčku MFR a je k dispozici v prostředí Matlab nebo Python. Místo obvyklého iteračního cyklu, optimalizujícího výsledek na konstantních datech, bude v rámci BP algoritmus upraven tak, aby iteroval výsledek na pomalu se vyvíjejících datech. V rámci následného testování je nutné ověřit stabilitu upraveného algoritmu ve vztahu k rychlosti změn dat v čase (jak syntetických, tak experimentálních). Fakultativně doporučujeme zařadit návrh mechanismu, který by umožnil korekci výpočtu při nestabilitě vzniklé náhlou změnou dat.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 9. 7. 2012

Viktor Löffelmann

Poděkování

Děkuji RNDr. Janu Mlynářovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Viktor Löffelmann

Název práce:

Tomografie měkkého rentgenového záření pro řízení tokamaku v reálném čase

Autor: Viktor Löffelman

Obor: Fyzikální inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: RNDr. Jan Mlynář, Ph. D.
ÚFP AV ČR

Abstrakt: Teoretická část této práce popisuje principy několika tomografických algoritmů, zejména pak algoritmu Tichonovovy regularizace s minimalizací Fisherovy informace, který je používán na tokamaku COMPASS. V rámci následující části práce bylo implementováno několik modifikací algoritmu s cílem umožnit iteraci na proměnných datech a dosáhnout tak významného urychlení výpočtu. Rovněž bylo navrženo kritérium pro rozpoznání poškozených rekonstrukcí. Nově implementované algoritmy byly vyzkoušeny na modelových i reálných datech.

Klíčová slova: Tomografie plazmatu, minimum Fisherovy informace, iterace na proměnných datech

Title:

Soft X-ray tomography for real time control of tokamak experiments

Author: Viktor Löffelman

Abstract: The theoretical part of this thesis describes function of several tomographic algorithms, in particular the Tikhonov regularization with the minimum Fisher information, which is currently used at the COMPASS tokamak. Modifications of this algorithm were implemented, which enable iteration with evolving data as the input and result in significant acceleration of the calculation. A simple criterion was developed to recognize corrupted reconstructions. All the new algorithms were tested using both artificial and real input data.

Key words: Plasma tomography, minimum Fisher information, evolving data iterative processing

Obsah

Úvod	8
1 Diagnostika a řízení	10
1.1 Tomografie	11
1.2 Detektory pro tomografii	12
2 Metody tomografické inverze	14
2.1 Filtrovaná zpětná projekce	14
2.2 Cormackova metoda	15
2.3 Pixelové metody	17
2.3.1 Abelova metoda	18
2.3.2 Metody s obdélníkovými pixely	18
2.3.3 Výběr nejlepšího řešení	18
3 Algoritmus Tichonovovy regularizace	20
3.1 Volba regularizačního parametru	20
3.1.1 L-křivka	21
3.1.2 Volba parametru podle velikosti šumu	21
3.1.3 Numerické hledání λ	23
3.2 Volba hodnotící funkce	23
3.2.1 Maximalizace entropie	23
3.2.2 Minimalizace velikosti prostorových derivací	24
3.2.3 Minimalizace Fisherovy informace	25
3.3 Řešení regularizované úlohy	25
3.3.1 Řešení nelineárně regularizovaných úloh	26
3.3.2 Řešení minimalizace Fisherovy informace	27
3.4 Některá specifika algoritmu na tokamaku COMPASS	27
3.4.1 Organizace vícenásobných iteračních metod	27
3.4.2 Upravená Tichonovova regularizace	28
3.4.3 Dodatečné a priori informace	28

4	Modifikace algoritmu	29
4.1	Možnosti urychlení výpočtu	29
4.1.1	Snížení počtu pixelů	29
4.1.2	Alternativní metody řešení soustav lineárních rovnic	29
4.1.3	Paralelizace, Rapid verze	30
4.1.4	Vhodná volba počátečního přiblížení	30
4.2	Rozpoznání ztráty konvergence	31
4.3	Implementace iterace na proměnných datech	32
4.3.1	Sjednocení iteračních cyklů	33
4.3.2	Testování iterace s průběžným přepočtem W	34
4.3.3	Testování na proměnných datech	35
4.3.4	Pokusy o zvýšení stability metody	35
5	Testování na reálných datech	38
5.1	Dostupná data	38
5.2	Konvergence iterace na proměnných datech	38
5.3	Kritéria konvergence	42
5.4	Výpočetní čas algoritmu	44
	Závěr	45
	Seznam použitých zdrojů	47
	Přílohy	49
	A Obsah CD	50

Úvod

Jaderná fúze je typem jaderné reakce, při níž ze dvou atomových jader vzniká jedno těžší jádro a zpravidla ještě další produkty.

Pokud jsou jádra vstupující do fúze lehká, jako například jádra vodíku, je tato reakce silně exotermická. Vzhledem k dostupnosti lehkých jader v přírodě se nabízí využití jaderné fúze v energetice. Získávání energie pomocí jaderné fúze by bylo výhodné nejen z ekonomického, ale i ekologického hlediska.

Velikost energie uvolněné při fúzní reakci je rovna rozdílu celkové vazebné energie produktů a reaktantů. Přitom pro jádra s nukleonovým číslem nižším než 60 přibližně platí, že těžší jádra mají vyšší vazebnou energii v přepočtu na jeden nukleon než ta lehčí. Je tedy v principu možné získávat energii i slučováním jader o mnoho těžších než vodík. Jako nejperspektivnější se však v současnosti jeví následující reakce izotopů vodíku, konkrétně deuteria a tritia:



Výhodou izotopů vodíku je fakt, že potenciálová bariéra daná především elektrostatickým odpuzováním nabitých jader je u vodíku nižší, než je tomu u jader obsahujících více protonů. I přesto však realizace slučování jader deuteria a tritia vyžaduje značné úsilí. Nejpoužívanější metoda spočívá v zahřátí vodíkového paliva na vysokou teplotu, při níž náhodné srážky jader mají dostatečnou energii k překonání potenciálové bariéry. Tento přístup je označován jako termonukleární fúze.

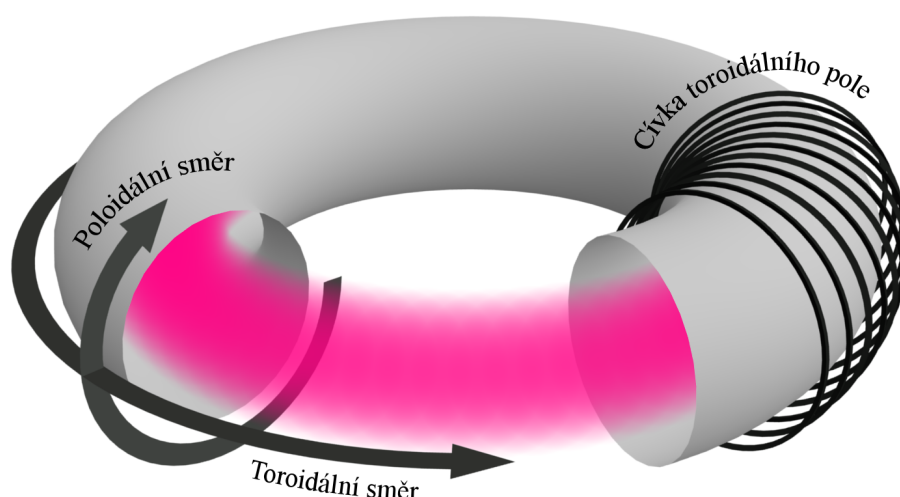
Pro provoz termonukleárního reaktoru je třeba udržet vodíkové plazma na dostatečně vysoké teplotě a hustotě při co nejdelší době udržení energie¹. Vzhledem k vlastnostem plazmatu je možné použít k jeho zachycení magnetické pole. S jeho pomocí je možné vytvořit magnetickou nádobu, která bude udržovat plazma ve vymezeném prostoru, aniž by docházelo ke kontaktu plazmatu s materiálem reaktoru.

Tato práce se zabývá aktuálně nejpokročilejším zařízením využívajícím magnetického udržení plazmatu, tokamakem.

Tokamak je zařízení vytvářející toroidální magnetické pole, které udržuje prstenec plazmatu uvnitř toroidální vakuové komory. Toroidální tvar pole je výhodný proto, že jeho siločáry neprocházejí přes hranice magnetické nádoby (v ideálním případě). Nabité částice plazmatu, které se mohou relativně volně pohybovat ve směru rovnoběžném s vektorem magnetické indukce, při tomto tvaru pole neopouštějí nádobu podél siločar, jako to dělají u zrcadlových nádob.

Avšak pole vytvářené jednoduchými cívkami navlečenými na komoru není homogenní. Na té straně komory, která je dále od středu prstence, je magnetická indukce nižší než na straně bližší ke středu. Zatímco v homogenním poli částice pohybující se kolmo na pole opisují uzavřené kruhové trajektorie, v nehomogenním poli driftují ve směru kolmém k poli, tedy směrem

¹ Tyto podmínky kvantitativně vyjadřuje Lawsonovo kritérium, viz např. [1]



Obr. 1: Schéma komory tokamaku; Toroidální a poloidální směr

ke stěně komory. Tento nedostatek je možné odstranit změnou tvaru magnetického pole tak, aby jeho siločáry namísto čistě toroidálních kružnic tvořily šroubovice.

Potřebného tvaru pole je možné dosáhnout různými způsoby. Jedním z nich je vhodné vytvarování toroidálních cívek tak, aby přímo vytvářely stočené magnetické pole. Tento způsob je využit v zařízení zvaném stelarátor. Naproti tomu v tokamaku je výsledné magnetické pole tvořeno kombinací jednoduchého toroidálního pole a pole poloidálního. Poloidální složka je generována elektrickým proudem procházejícím přímo skrz prstenec plazmatu. Tento proud je v plazmatu indukován proudovým impulsem v cívkách, které jsou s prstencem plazmatu spojeny induktivní vazbou, podobně jako primární vinutí transformátoru se sekundárním.

Moderní tokamaky mívají komoru vertikálně protaženou, tak, že na průřezu má tvar písmene D. Podobný tvar pak má i magnetické pole a také plazma. Navíc je součástí jejich komory divertor, oblast, v níž jsou okrajové vrstvy plazmatu v přímém kontaktu s komorou. Takové uspořádání se vyznačuje dobrým udržením plazmatu a nízkou interakcí se stěnou komory mimo divertor.

Navzdory popsaným snahám o vytvoření spolehlivé magnetické nádoby vykazuje plazma v tokamaku řadu různých nestabilit. To je jedním z důvodů, proč bývají na tokamacích instalovány rozsáhlé soustavy diagnostických systémů. Dostatečně rychlá diagnostika v kombinaci s řídicími cívkami umožňuje zavést aktivní zpětnou vazbu a eliminovat některé z nestabilit.

1 Diagnostika a řízení

V určitých fázích výboje plazma v tokamaku prochází prudkým vývojem. Objevuje se v něm mnoho různých druhů nestabilit, které vychylují plazma ze středu komory, zvyšují únik částic a interakci se stěnou komory. Zároveň se mění prostorové rozložení teploty, hustoty nebo koncentrace příměsí.

V tokamacích s vertikálně tvarovaným plazmatem působí na plazma destabilizující síla, která vychyluje plazma ze středu komory ve vertikálním směru. Analogicky je plazma nestabilní v radiálním směru, což je způsobeno především magnetickým působením prstence plazmatu sama na sebe [2]. Tyto nestability je třeba nějak měřit a řídit, jinak by plazma rychle narazilo na stěnu komory.

Nejjednodušším způsobem, jak stabilizovat polohu plazmatu, je vyrobit komoru tokamaku vodivou. Pohybující se plazma protékané elektrickým proudem pak ve stěně komory indukuje vířivé proudy, jejichž magnetické pole působí proti dalšímu pohybu plazmatu [2]. Tímto způsobem je možné vertikální a radiální nestabilitu poněkud zpomalit, ale vzhledem k tomu, že komora nemůže být vodivá dokonale, nelze takto pohyb plazmatu úplně eliminovat. Další možnost řízení poskytuje detekce polohy plazmatu v komoře v kombinaci s proměnným vnějším magnetickým polem, tedy aktivní zpětná vazba. K tomu je ovšem potřeba nějakým způsobem měřit polohu plazmatu, a to s dostatečně velkým časovým rozlišením a co nejmenším zpožděním mezi vstupem ze senzorů a výstupem pro řízení.

Jednu z možností měření parametrů plazmatu poskytuje magnetická diagnostika, tedy senzory měřící magnetické pole plazmatu. Kombinace několika typů měřicích cívek, rozmístěných v komoře a kolem komory tokamaku, umožňuje měřit celkový proud plazmatem, určit rozdělení proudové hustoty a polohu středu plazmatu, případně detekovat některé nestability.

V současnosti používané magnetické detektory zpravidla využívají induktivní vazby mezi plazmatem a měřicí cívkou. Takováto zařízení měří derivaci magnetické indukce, její okamžitá velikost se pak získává integrací. Magnetické detektory jsou tak citlivé na změny polohy plazmatu. V určované absolutní poloze se však v důsledku integrace hromadí chyby měření. Proto je vhodné doplnit diagnostickou soustavu detektory schopnými stanovit okamžité magnetické pole, jako jsou Hallovy sondy, nebo jiným nezávislým systémem měřícím polohu plazmatu [3].

Jinou možností zjištění polohy a dalších parametrů plazmatu je měření záření plazmatu. Plazma vyzařuje elektromagnetické záření především v ultrafialové a měkké rentgenové části spektra. V idealizovaném případě čistého vodíkového plazmatu je většina tohoto záření tvořena zářením brzdným, tedy zářením elektronů prudce měnících rychlost při srážkách s dalšími částicemi. Brzdné záření v rentgenové oblasti vzniká převážně ve středu plazmatu, kde je nejvyšší elektronová teplota.

Teplota ve většině objemu plazmatu stačí k úplné ionizaci vodíku a ten pak nevyzařuje charakteristické záření způsobené přechody elektronů mezi hladinami. Těžší příměsí, pocházející

například ze stěny komory, mohou proniknout jen částečně ionizovány i do oblastí s vyššími teplotami [4]. Tyto příměsi se pak projevují diskretním rentgenovým spektrem.

Vzhledem k uvedeným vlastnostem rentgenového vyzařování plazmatu se nabízí využití rentgenových detektorů k určování koncentrace nečistot a jejího časového vývoje, měření polohy nejteplejších oblastí plazmatu a případně k detekci těch nestabilit, které lokálně mění elektronovou teplotu.

1.1 Tomografie

Na měkkých rentgenových frekvencích má fúzní plazma zanedbatelnou absorpci, tedy je průhledné. Jeho index lomu je také zanedbatelný. Detektor sledující intenzitu měkkého rentgenového záření v určitém směru tak zaznamenává záření vycházející z celého sloupce plazmatu ležícího v tomto směru. Za určitých předpokladů je ovšem možné z údajů více takovýchto detektorů rekonstruovat lokální emisivitu plazmatu. Z ní je pak patrná nejen poloha plazmatu, ale i jeho tvar a struktura.

Metoda výpočtu lokálního průběhu funkce z naměřených integrálních hodnot se nazývá tomografická inverze nebo tomografická rekonstrukce. Tato definice je poměrně univerzální. V případě tomografie plazmatu je rekonstruovanou funkcí hustota vyzařování, zatímco u medicínské metody známé jako CT² je jí naopak hustota tlumení rentgenového záření. I v dalších nejen medicínských metodách je využívána tomografie splňující obecnou definici, ačkoli konkrétní algoritmy pro rekonstrukci se navzájem méně či více odlišují.

Tomografie fúzního plazmatu klade na rekonstrukční algoritmus nároky poněkud odlišné od nároků medicínských a průmyslových aplikací. Jejím hlavním problémem je omezený přístup ke zkoumanému objektu, který je uzavřen v neprůhledné vakuové komoře uvnitř tokamaku. Detektory mohou být umístěny pouze v diagnostických portech rozmístěných kolem komory. Dále jimi nelze během měření pohybovat jako u CT, a to nejen z důvodu jejich zabudování do otvorů v komoře, ale i proto, že je nutné vysoké časové rozlišení. Pro každý z portů je tedy potřeba jeden detektor, což omezuje celkový počet směrů, z nichž je plazma pozorováno.

Některé vlastnosti plazmatu v tokamaku umožňují zavést určitá zjednodušení v soustavě detektorů i v rekonstrukčních algoritmech. Obvykle se předpokládá, že plazma je v toroidálním směru rotačně symetrické a detektory stačí umístit pouze do jedné nebo několika málo rovin protínajících komoru ve směru poloidálním. Rekonstruuje se pak dvojrozměrný řez plazmatem. Dále je v některých případech možno předpokládat, že plazma je symetrické i v poloidálním směru, respektive že je hladké ve směru rovnoběžném s ekvipotenciálními plochami magnetického pole. To může výrazně zvýšit efektivitu rekonstrukčního algoritmu, v případě úplné rotační symetrie pak dokonce stačí umístit detektory do jediného bodu k rekonstrukci celého obrazu. Ve většině případů bohužel takovou symetrii předpokládat nelze, například v různých nestabilitách bývá silně narušena.

Podle účelu tomografického měření plazmatu se volí vhodný kompromis mezi prostorovým

2 Zkratka CT znamená Computed Tomography, výpočetní tomografie. K dalším tomografickým metodám v medicíně patří například MRI a PET.

rozlišením, výpočetním časem a množstvím šumu a artefaktů³ v rekonstruovaném obrazu. Pro studium nestabilit a transportních jevů je vhodné dobré prostorové rozlišení za cenu nižšího rozlišení časového (maximální prostorové rozlišení je však omezeno dostupnými daty). Naopak, pokud má být tomografie využita pro řízení tokamaku, je třeba provádět rekonstrukci v reálném čase.

Bylo vyvinuto několik algoritmů, které dovedou z omezených dat rychle rekonstruovat průřez plazmatem a zároveň jsou dostatečně odolné proti šumu a artefaktům. Tyto algoritmy zatím mají využití především v rychlém zpracování dat po skončení výboje v tokamaku, ovšem vzhledem k vývoji elektroniky i samotných algoritmů se situace v oblasti tomografického řízení v reálném čase postupně zlepšuje. Několik z těchto algoritmů je stručně popsáno v kapitole 2.

1.2 Detektory pro tomografii

Nejčastěji používanými detektory pro tomografii měkkého rentgenového záření jsou detektory polovodičové. Patří k nim různé typy křemíkových fotodiod. Tyto diody se zpravidla zapojují s konstantním napětím v závěrném směru a měří se procházející proud, který je závislý na osvětlení aktivní plochy diody.

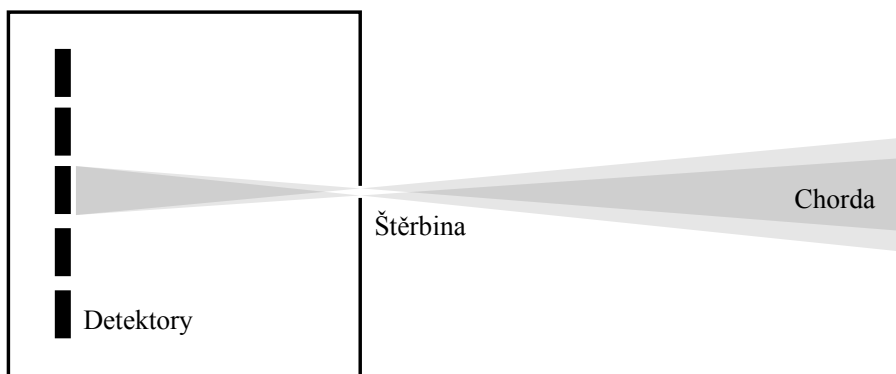
Předností polovodičových fotodiod je vysoké časové rozlišení (typicky jde o jednotky μs , diody typu PIN umožňují ještě vyšší časové rozlišení). K jejich nevýhodám patří šum, který s pracovní teplotou exponenciálně roste, a také fakt, že poškození rentgenovým zářením nebo neutronovou radiací mění jejich citlivost. Při použití k tomografii fúzního plazmatu je proto třeba detektory pravidelně vyměňovat (jejich cena je poměrně nízká), případně použít jiný typ detektorů, jakým jsou například vakuové fotodiody [5].

Některé z používaných typů fotodiod, jako jsou AXUV diody, jsou citlivé na široké spektrum elektromagnetického záření, od blízkého infračerveného až po měkké rentgenové. Tyto diody jsou používány jako bolometry, tedy pro měření celkového zářivého výkonu nebo jeho tomografii. Oproti tepelným bolometrům mají AXUV diody vyšší časové rozlišení a nižší cenu. Jsou také méně citlivé na neutrální částice [5]. Jejich nevýhodou oproti tepelným bolometrům je nerovnoměrná citlivost na záření o různých energiích [6], při měření celkového vyzářeného výkonu tedy mohou podávat zkreslené výsledky.

Detektory pracující jako bolometry však lze použít i k detekci měkkého rentgenového záření, pokud odfiltrujeme záření o nižších energiích. To se provádí umístěním velmi tenké beryliové fólie před detektor.

Popsané typy detektorů zaznamenávají záření dopadající na aktivní plochu z libovolného směru. Pro tomografii je ovšem důležité určit co nejpřesněji směr, odkud záření přichází. Proto se používá jednoduché zařízení zvané *pinhole camera*, tedy jednorozměrná dírková komora (někdy také *camera obscura*, temná komora). Záření prochází úzkou štěrbinou, která slouží jako jednoduchá a spolehlivá optika přístroje, a dopadá na řadu detektorů. Každý z detektorů zaznamenává záření dopadající na štěrbinu z konkrétního směru. Úzký pás prostoru pozorovaný konkrétním detektorem se nazývá chorda (viz obrázek 1.1).

3 Pojmeme *artefakty* se rozumí struktury, které nejsou přítomny v původních datech a vznikly až při rekonstrukci.



Obr. 1.1: Schéma řádkové dírkové komory s detailem jedné chordy

Ve směru rovnoběžném s polem detektorů je vhodné mít štěrbinu co nejužší. To zajistí dobré prostorové ohraničení jednotlivých chord, tedy nízké rozmazání jejich okrajů. Zároveň se tím minimalizuje překrývání sousedních chord. Naopak volba větší šířky štěrbinu v kolmém směru poskytuje lepší osvětlení detektorů s minimálním dopadem na ostrost. Předpokládá se ovšem toroidální symetrie plazmatu v tokamaku, díky níž se na šířce chordy v toroidálním směru příliš nemění vyzařování plazmatu. Zvláště u menších zařízení je tímto požadavkem velikost štěrbinu omezena.

2 Metody tomografické inverze

Tato kapitola popisuje několik základních principů využívaných v tomografii.

2.1 Filtrovaná zpětná projekce

Poněkud idealizovaný popis situace představuje Radonova transformace. Předpokládáme, že chordy mají podobu přímek a hodnoty měřené příslušnými detektory jsou křivkovými integrály získanými integrací podél těchto přímek. Dále je nutné umístit detektory do všech bodů na okraji pozorovaného plazmatu, a to tak, aby jednotlivé detektory v konkrétním bodě mířily do všech relevantních směrů. Pokud ke stávajícím předpokladům přidáme ještě nulový šum detektorů, získáme rovnici, kterou je možné analyticky vyřešit a získat tak přesný tvar rekonstruované funkce.

Za účelem popisu Radonovy transformace je vhodné definovat následující souřadnice, jimiž popíšeme geometrické uspořádání detektorů v komoře. V rovině řezu komorou zvolíme počátek souřadnic. Každou chordu pak lze reprezentovat jedním bodem na ní ležícím, který má nejmenší vzdálenost od zvoleného počátku. Rovněž platí, že každému bodu v rovině řezu (s výjimkou počátku souřadnic) odpovídá právě jedna chorda. Vzhledem k tomu, že každá z chord detekuje jednu integrální hodnotu, získali jsme transformaci, která vzorové funkci vyjadřující emisivitu plazmatu na průřezu komorou přiřazuje jinou funkci na stejném definičním oboru, kterou je ovšem možné přímo měřit detektory umístěnými na okrajích plazmatu. Tuto novou funkci nazýváme projekci a její definiční obor projekčním prostorem.

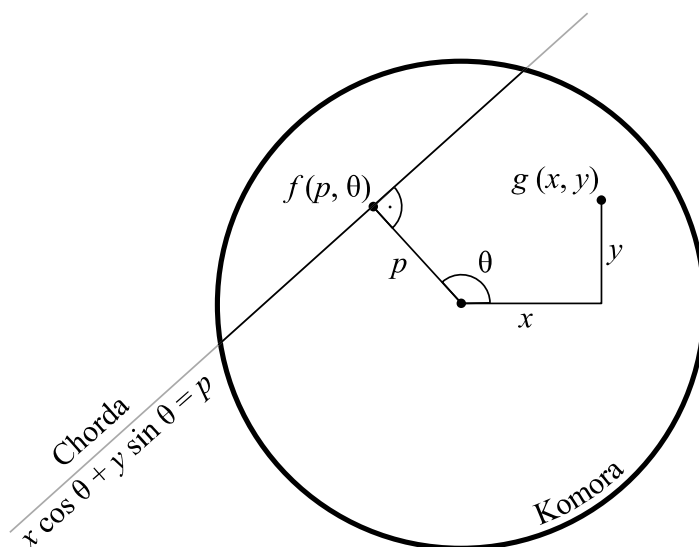
Označme vzorovou funkci jako $g(x, y)$ a projekci jako $f(p, \theta)$, kde p a θ jsou polární souřadnice bodu reprezentujícího chordu. Radonovu transformaci teď můžeme zapsat takto:

$$f(p, \theta) = \int_{R^2} g(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - p) dx dy =: \hat{R}\{g\} \quad (2.1)$$

Delta funkce v integrálu zajistí, že místo celé plochy integrujeme pouze po přímce reprezentované polárními souřadnicemi p a θ .

Abychom mohli provést tomografickou rekonstrukci a získat funkci g , je třeba najít inverzní transformaci. Taková transformace existuje a je založena na transformaci Fourierově. Uskutečnění jejího numerického výpočtu klade vysoké nároky na soustavu detektorů, protože projekci f je nutné znát na celém projekčním prostoru. Mnoho technologií používaných například v medicíně však tyto nároky s dostatečnou přesností splňuje. Inverzní transformace se pak obvykle realizuje ve dvou krocích, filtraci a zpětné projekci, podle nichž se tato rekonstrukční metoda nazývá filtrovanou zpětnou projekcí.

Pokud nemáme projekční prostor pokryt detektory dostatečně hustě, nabízí se možnost interpolovat známé hodnoty. V situaci typické pro tomografii plazmatu by však šlo o poměrně dalekou interpolaci, která by do dat zanášela značné chyby. Inverzní Radonova transformace navíc proti chybám v datech příliš odolná není [7], jde o tzv. špatně podmíněnou úlohu. Filtrovaná zpětná projekce proto zpravidla není vhodná pro tomografii plazmatu.



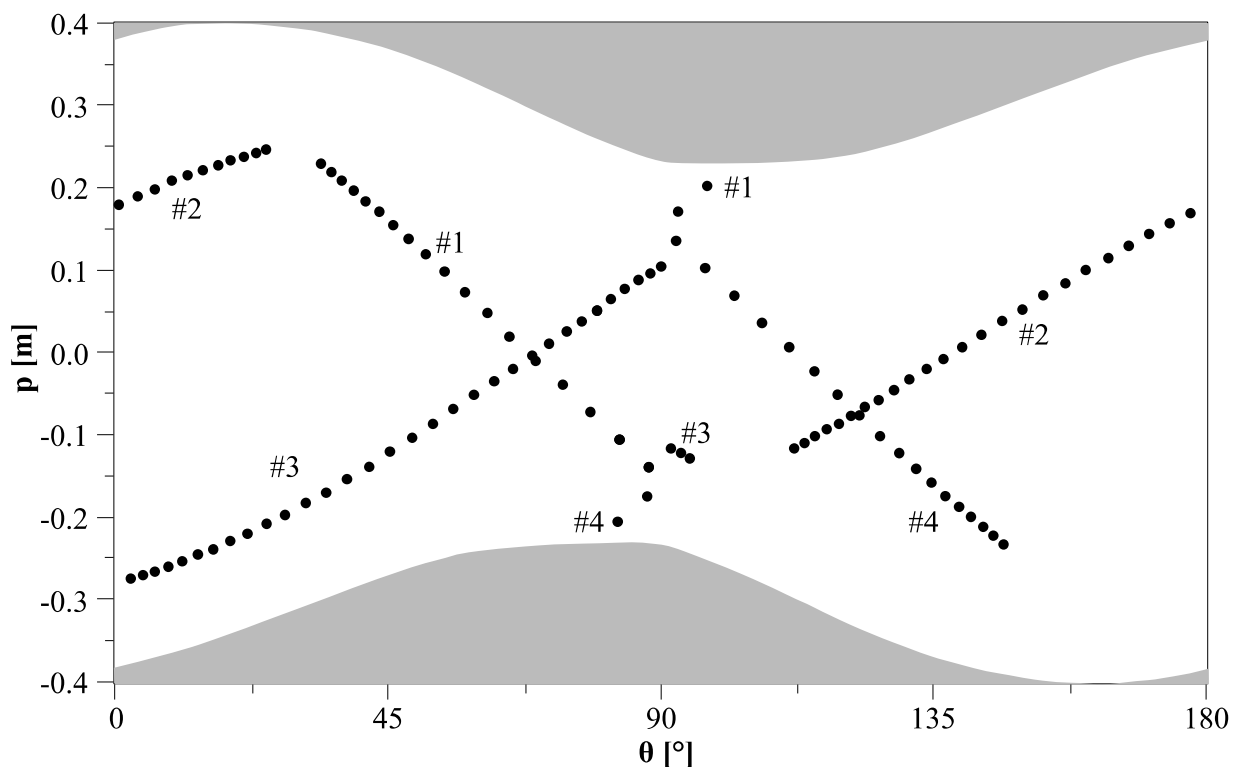
Obr. 2.1: Znáznornění Radonovy transformace $f(p, \theta) = \hat{R}\{g(x, y)\}$

2.2 Cormackova metoda

Cormackova metoda je jednou z metod využívajících rozkladu zkoumaných funkcí do řady jednodušších navzájem ortogonálních funkcí. Pak je možné místo původních funkcí pracovat s jejich rozklady, což může vhodnou volbou oněch básových funkcí problém zjednodušit. Příslušné řady jsou obecně nekonečné, ale za určitých předpokladů je možné v řadách zanedbat členy vysokých řádů a převést tak problém o nekonečné dimenzi na konečný.

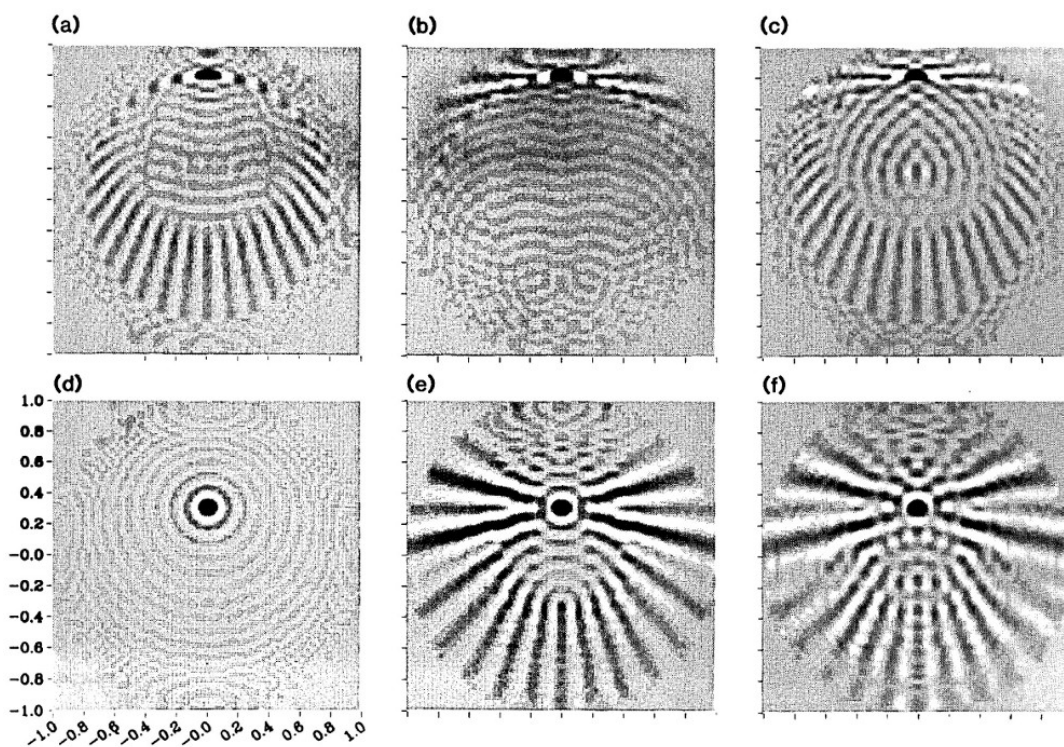
V případě Cormackovy metody rozkládáme zkoumané funkce do báze funkcí nazývaných Zernikovy polynomy, které se dají vyjádřit jako součin polynomu v polární proměnné p a Fourierovy řady v proměnné θ . Tomografické integrální rovnice je tak možné převést na konečný počet rovnic polynomů a následně na soustavu lineárních rovnic. Získaná soustava rovnic se obvykle řeší metodou nejmenších čtverců. Tím je zajištěna možnost získání rekonstrukce i v případě, že tato soustava je přeürčená [7]. Navíc je taková rekonstrukce značně odolná proti šumu.

Cormackova metoda pracuje nejlépe pro přibližně rotačně symetrické tvary plazmatu, přičemž za střed polárních souřadnic je třeba zvolit střed symetrie plazmatu. Je tedy nutné znát polohu středu dříve, než začneme s tomografickou rekonstrukcí. Při použití počátku souřadnic výrazně odlišného od středu plazmatu poskytuje metoda poněkud zdeformované tvary [6]. Také může vznikat aliasing mezi tvarem plazmatu a tvarem použitých básových funkcí, umožněný zanedbáním vyšších členů řad. Tento aliasing do rekonstruovaného obrazu zanáší artefakty, tedy útvary, které se ve skutečném profilu plazmatu nevyskytují. Příklad artefaktů vznikajících v důsledku aliasingu ukazuje obrázek 2.3.



Obr. 2.2: Pokrytí projekčního prostoru tokamaku COMPASS detektory umístěnými ve čtyřech diagnostických portech. Šedé oblasti leží za hranicí komory.

Převzato z [7]



Obr. 2.3: Aliasing v Cormackově metodě pro různě přesné rozvoje v proměnných θ a p ;
Ve všech případech jde o rekonstrukci bodového zdroje;

Převzato z [8]

2.3 Pixelové metody

Podobně jako v metodě Cormackově se v pixelových metodách využívá rozkladu zkoumaných funkcí do řady jednodušších funkcí. Těmito jednoduššími funkcemi jsou tentokrát funkce konstantní na určité ohraničené oblasti (pixelu) definičního oboru a nulové všude jinde. Tvary a umístění pixelů se obvykle volí tak, aby dohromady pokrývaly celou plochu řezu plazmatem, ale navzájem měly prázdný průnik. Podobně jako Zernikovy polynomy jsou tak pixelové funkce navzájem ortogonální, ačkoli je nelze považovat za bázi.

Narozdíl od členů řad v Cormackově metodě je pixelů z principu konečný počet a vždy se tak pracuje pouze s aproximací rekonstruované funkce g . Nevznikají ovšem artefakty způsobené aliasingem, protože hodnota konkrétního pixelu se v rekonstrukci projeví pouze v oblasti onoho pixelu.

Pro použití pixelových metod můžeme tomografickou funkcionální rovnici analogickou výše uvedené rovnici (2.1) zapsat jako následující soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$f_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} \cdot g_j . \quad (2.2)$$

V tomto zápisu f_i představuje hodnotu naměřenou i -tým detektorem, g_j hodnotu rekonstruované funkce na j -tém pixelu, N je celkový počet pixelů a T_{ij} je geometrický koeficient, který vyjadřuje příspěvek vyzařování j -tého pixelu k hodnotě detekované i -tým senzorem. Stejnou soustavu rovnic můžeme zapsat vektorově, tedy interpretovat funkci g jako vektor zahrnující hodnoty ve všech pixelech a geometrické koeficienty T_{ij} uspořádat do matice $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{g} . \quad (2.3)$$

Tomografická rekonstrukce nyní spočívá ve vyřešení této soustavy.

Další postup závisí na daném uspořádání pixelů a detektorů. Matice $\mathbf{T}$ je totiž obecně obdélníková a úloha (2.3) špatně určená. V případě přeurčené soustavy (více detektorů než pixelů) je možné využít metodu nejmenších čtverců a získat vektor $\mathbf{g}$, který v určitém smyslu splňuje rovnici nejlépe. Tím se zároveň do jisté míry zbavíme vlivu šumu detektorů.

Případ nedostatečně určené soustavy je ovšem častější, protože kvůli požadavkům na prostorové rozlišení bývá zvolený počet pixelů vyšší než použitý počet detektorů. V takovém případě má řešení vektorové rovnice určitý kladný počet stupňů volnosti a existuje obecně nekonečně mnoho odlišných vektorů $\mathbf{g}$, které soustavu přesně řeší. Vzhledem k nevyhnutelnému šumu detektorů mezi nimi navíc „to správné“ řešení není. Proto je třeba zavést nějaké dodatečné podmínky, podle kterých vybereme jediný vektor $\mathbf{g}$ blížící se takovému řešení, které považujeme za optimální. Vzhledem k faktu, že úloha je špatně určená, může být řešení nesplňující tyto podmínky od hledaného řešení značně odlišné.

Pixelové metody lze dále rozdělit podle použitého tvaru pixelů a podle dodatečných podmínek kladených na rekonstruovanou funkci.

2.3.1 Abelova metoda

Abelova metoda ve své pixelové podobě pracuje s pixely ve tvaru soustředných mezikružích, případně jiných navzájem vnořených uzavřených křivek. Je vhodná pro rekonstrukci rotačně symetrických tvarů, obecněji pak pro rekonstrukci tvarů symetrických podél linií daných zvoleným tvarem pixelů. Za takovýchto předpokladů pak pro rekonstrukci stačí například data naměřená jedinou vějířovitě uspořádanou skupinou detektorů umístěnou v pevném bodě, tedy jedinou dírkovou komorou.

O plazmatu obvykle předpokládáme, že je hladké podél ekvipotenciálních ploch magnetického pole v komoře. Někdy lze dokonce předpokládat, že je emisivita podél celých těchto ploch konstantní a splňuje tedy předpoklady pro Abelovu metodu, pokud zvolíme pixely kopírující tvar magnetického pole. Podobně jako u metody Cormackovy však narážíme na potřebu znalosti aktuálního tvaru magnetického pole, respektive polohy jeho středu. Navíc předpoklad symetrie plazmatu podél magnetického pole není splněn vždy, například během některých nestabilit bývá tato symetrie narušena. Výstupem Abelovy metody sice může být dvojrozměrný obraz, ten je ovšem tvořen soustřednými pixely a nese tak pouze jednorozměrnou informaci o profilu plazmatu. Pro určení polohy středu plazmatu tak Abelova metoda příliš vhodná není.

2.3.2 Metody s obdélníkovými pixely

Rovnoměrné rozdělení zkoumaného řezu na pixely ve tvaru čtverců nebo obdélníků je v jistém smyslu obecnější než metoda Abelova, protože není třeba předpokládat žádnou rotační symetrii ani hladkost v určitých úsecích obrazu. Tomografická rovnice zůstává i tentokrát ve tvaru (2.3), vektor všech pixelů $\mathbf{g}$ je v tomto zápisu stále (sloupcovým) vektorem, ačkoli z geometrického hlediska jsou pixely uspořádány do matice.

Obecnost metody přináší ovšem i nevýhody. Pokud například rekonstruovaná funkce g nějaké symetrie splňuje, poskytnou obdélníkové pixely nižší prostorové rozlišení než pixely kopírující tyto symetrie (při srovnatelném počtu použitých pixelů). Závažnějším problémem je ovšem fakt, že síť obdélníkových pixelů může být pro daný účel až příliš obecná. Zatímco pixely tvarované podle očekávaných symetrií vnášejí do problému určitou a priori informaci o hledaném řešení, obdélníkové pixely žádnou takovou informaci nenesou a pro nalezení vhodného řešení je zpravidla nutné aplikovat nějaké dodatečné podmínky.

2.3.3 Výběr nejlepšího řešení

Podmínky na řešení lze vyjádřit pomocí *hodnotící funkce*. Tato funkce přiřazuje každému možnému vektoru $\mathbf{g}$ jedno reálné číslo. Za nejlepší řešení pak považujeme takový vektor $\mathbf{g}$, na němž zvolená hodnotící funkce nabývá extrému na množině všech přípustných řešení. Za množinu přípustných řešení považujeme v nejjednodušším případě množinu řešení rovnice (2.3). Vzhledem k tomu, že tato množina je lineární varietou, lze použít Lagrangeovu metodu hledání extrému na varietě.

Je zřejmé, že výsledek tomografické rekonstrukce významně závisí na volbě hodnotící funkce. Lze volit například minimalizaci absolutní hodnoty samotného vektoru $\mathbf{g}$ nebo jeho první či

druhé prostorové derivace. Jinou možností je minimalizace Fisherovy informace, která bude popsána v následující kapitole.

I při vhodné volbě hodnotící funkce bude získané řešení zatíženo šumem přítomným v měřených datech. Vliv šumu můžeme eliminovat tím, že rozšíříme množinu přípustných řešení. Připustíme i takové vektory $\mathbf{g}$, které rovnici (2.3) neřeší přesně, ale s nenulovou střední kvadratickou odchylkou nepřesahující zvolenou mez. Kromě horní meze můžeme stanovit i dolní mez pro střední kvadratickou odchylku řešení, protože se dá předpokládat, že určitá úroveň šumu bude v datech přítomna vždy.

Takto definovaná množina přípustných řešení ovšem komplikuje následné hledání minima hodnotící funkce, není totiž varietou. Za účelem efektivního hledání tohoto minima proto zvolíme jedinou hodnotu střední kvadratické odchylky, kterou očekáváme od řešení, a uvažujeme jenom takové vektory $\mathbf{g}$, které této odchylky přesně nabývají. Tato množina už varietou je.

Následující kapitola stručně představuje možnosti implementace popsaného algoritmu.

3 Algoritmus Tichonovovy regularizace

Rovnici (2.3) můžeme ekvivalentně zapsat takto:

$$\|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\| = 0, \quad (3.1)$$

kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu. Rovnice v novém tvaru je ovšem stejně špatně určená jako původní rovnice (2.3). V případě přeurčené soustavy by nyní pomohlo přeformulovat úlohu do tvaru metody nejmenších čtverců:

$$\|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 = \min \quad (3.2)$$

Takto bychom našli jednoznačné řešení, které se naměřeným datům v jistém smyslu nejvíce blíží. Přeurčená soustava však v tomografii plazmatu není typickým případem, obvykle je počet pixelů g_j větší než počet použitých detektorů f_i . Úloha (3.2) má tedy stejnou množinu řešení jako předchozí formulace.

Pro výběr jediného řešení nedostatečně určené rovnice je patrně třeba zavést nějaké další podmínky kladené na ono řešení. Jedním ze způsobů, jak to provést, je Tichonovova regularizace [9, 10]. Ta spočívá v řešení modifikované úlohy

$$\|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}\|^2 = \min. \quad (3.3)$$

Lineární funkcionál $\mathbf{\Gamma}$, nazývaný Tichonovova matice, vyjadřuje zmíněné podmínky kladené na řešení, přičemž jsou upřednostňována řešení s nízkou hodnotou tohoto funkcionálu. λ je pevně zvolené nezáporné číslo označované jako regularizační parametr. Matici $\mathbf{\Gamma}$ a případně parametr λ obvykle volíme tak, aby úloha (3.3) měla jediné řešení.

V některých případech je vhodné použít místo lineárního $\mathbf{\Gamma}$ funkcionál nelineární. V tom případě přepíšeme úlohu (3.3) jako

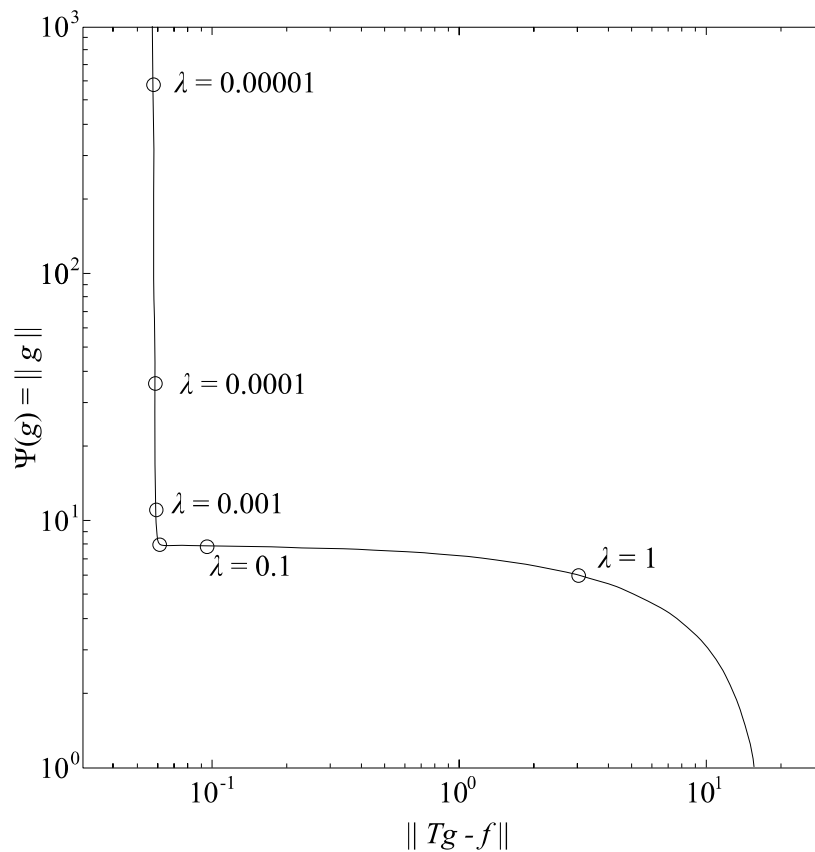
$$\|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda \Psi(\mathbf{g}) = \min, \quad (3.4)$$

kde Ψ je Tichonovův funkcionál, obecně jiný než kvadratický.

Na rozdíl od řešení předchozího tvaru úlohy nemusí řešení Tichonovovy regularizace přesně splňovat tomografickou rovnici (2.3). Také nemusí minimalizovat samotný funkcionál $\mathbf{\Gamma}$. Řešení je kompromisem mezi minimalizací rezidua tomografické rovnice a Tichonovova funkcionálu, přičemž regularizační parametr λ představuje váhu přikládanou Tichonovovu funkcionálu.

3.1 Volba regularizačního parametru

Parametr λ je vhodné zvolit dostatečně malý, aby získané řešení nebylo příliš vzdálené od řešení původní úlohy, ale také dostatečně velký, aby byl eliminován šum ve vstupujících datech a nedocházelo k overfittingu. Existuje několik metod, umožňujících zvolit parametr λ na míru konkrétnímu vektoru $\mathbf{f}$.



Obr. 3.1: Příklad L-křivky pro volbu $\Psi(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}\|$;
 Vyznačeno několik hodnot λ , za optimální se považuje ta v ostrém rohu křivky;
 Převzato z [11]

3.1.1 L-křivka

L-křivka je závislost logaritmu Tichonovova funkcionálu $\Psi(\mathbf{g})$ na logaritmu normy rezidua $\|T\mathbf{g} - \mathbf{f}\|$, přičemž obě souřadnice jsou svázány vztahem (3.4) pro všechny myslitelné hodnoty parametru λ [11]. Typická L-křivka má tvar písmene L, jak naznačuje obrázek 3.1. Podle intuitivní logiky leží bod příslušející optimálnímu λ v ostrém rohu křivky, protože při dalším zvyšování λ se řešení regularizované úlohy začne rychle vzdalovat od řešení původní úlohy.

Konkrétní bod můžeme najít jako maximum křivosti L-křivky nebo minimum součinu závislé a nezávislé proměnné. Ukazuje se však, že tvar L-křivky závisí na charakteru šumu v datech. Pro čistě náhodný šum s normálním rozdělením je ostrý roh jediný a výrazný, zatímco pro data se systematickými chybami mohou být zmíněná kritéria pro nalezení λ nejednoznačná [12].

Pro určení parametru λ z L-křivky není třeba zavádět žádné další předpoklady o vstupujících datech. Pokud však nějaké předpoklady máme k dispozici, je vhodné jich využít.

3.1.2 Volba parametru podle velikosti šumu

Regularizované řešení vykazuje odchylky od přesných řešení původní soustavy, tedy má nenulové reziduum. Přitom obvykle platí, že pro vyšší zvolené hodnoty parametru λ jsou tyto odchylky větší. Pokud známe velikost šumu přítomného v datech, můžeme zvolit λ tak, aby

velikost rezidua příslušného regularizovaného řešení byla rovna očekávané velikosti rezidua správného řešení, tedy přesného řešení rovnice nezatížené šumem.⁴ Taková volba λ nezaručí blízkost získaného řešení a řešení správného (jejich blízkost závisí ještě na volbě Tichonovova funkcionálu), ale přinejmenším míra redukce šumu a tedy zpravidla shlazení výsledného obrazu je v jistém smyslu optimální. Toto kritérium pro λ bývá označováno jako *Morozov's discrepancy principle* [9].

Označme σ očekávanou normu rezidua. Nyní tedy řešíme úlohu (3.3) nebo (3.4), přičemž λ volíme tak, aby řešení $\mathbf{g}$ splňovalo podmínku

$$\|Tf - \mathbf{g}\|^2 = \sigma^2. \quad (3.5)$$

Aktuální problém můžeme interpretovat jako hledání minima hodnotícího funkcionálu $\Psi(\mathbf{g})$ na varietě zadané rovnicí (3.5). Použitím metody Lagrangeových multiplikátorů získáme

$$\Lambda := \Psi(\mathbf{g}) + \kappa(\|\mathbf{Tf} - \mathbf{g}\|^2 - \sigma^2) = \min, \quad (3.6)$$

odkud po substituci za multiplikátor $\kappa = 1/\lambda$ a zanedbání konstanty dostaneme úlohu (3.4). Popsaná metoda výběru λ má tedy také určitou intuitivní logiku.

V dosavadním algoritmu používaném na tokamaku COMPASS se ovšem předpokládá, že známe střední kvadratické odchylky jednotlivých detektorů [7]. Pak lze podmínku na řešení vyjádřit takto:

$$\chi^2(\mathbf{g}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{\left(f_i - \sum_{j=1}^N T_{ij} g_j\right)^2}{\sigma_i^2} = 1. \quad (3.7)$$

Zde L je počet detektorů a σ_i očekávaná chyba i -tého detektoru. Za předpokladu, že údaje naměřené jednotlivými senzory f_i jsou náhodné veličiny s normálním rozdělením, střední hodnotou rovnou $\sum_{j=1}^N T_{ij} g_j$ a střední kvadratickou odchylkou σ_i^2 , splňuje funkcionál (3.7) definici Pearsonova rozdělení s L stupni volnosti, odkud pochází značení χ^2 [7].

Hodnota funkcionálu χ^2 vypovídá o přesnosti získaného řešení, přitom nula značí přesné řešení. Řešení, jemuž přísluší hodnota χ^2 příliš blízká nule, je ovšem podezřelé z fitování šumu přítomného ve vstupních datech a vytváření artefaktů, tedy z overfittingu. Naopak hodnota významně vyšší než 1 ukazuje na přílišné vyhlazení rekonstrukce, někdy nazývané oversmoothingem [14]. Oba případy znamenají znehodnocení rekonstrukce informací v originálním obrazu nepřítomnou, v případě overfittingu jde o šum, v opačném případě o a priori předpoklady. Protože χ^2 je náhodná veličina, není ovšem toto rozlišení zcela spolehlivé.

3.1.3 Numerické hledání λ

Předpokládejme prozatím, že regularizace je zadána v méně obecném tvaru (3.3), který má ovšem tu výhodu, že jej umíme analyticky vyřešit pro $\mathbf{g}$. Nyní je třeba najít λ tak, aby řešení (3.3)

⁴ V praxi neznáme aktuální hodnoty šumu v datech, pouze jejich pravděpodobnostní rozdělení. Používáme tedy aproximaci očekávané velikosti rezidua její střední hodnotou.

s tímto λ splňovalo podmínku (3.7). Tuto úlohu pro jednu neznámou už je nutné řešit numericky.

V současné verzi algoritmu používaného na tokamaku COMPASS se λ vypočítává metodou sečen. Pro rovnici

$$\phi(\lambda) = 0 \quad (3.8)$$

má iterační předpis metody sečen následující tvar:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} - \phi(\lambda_{i-1}) \frac{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}}{\phi(\lambda_{i-1}) - \phi(\lambda_{i-2})} . \quad (3.9)$$

Pro výpočet i -tého přiblížení kořene rovnice je tedy třeba znát dvě předchozí přiblížení λ_{i-1} , λ_{i-2} a hodnoty funkce ϕ v těchto dvou bodech. Výhodou oproti metodě tečen (neboli Newtonově metodě) je fakt, že nepotřebujeme znát derivaci funkce ϕ , jejíž výpočet může být obtížný.

Původní rovnici pro χ^2 (3.7) převedeme do tvaru (3.8) například použitím logaritmu:

$$\phi(\lambda) = \log(\chi^2(g(\lambda))) = \log\left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{\left(f_i - \sum_{j=1}^N T_{ij} g_j(\lambda)\right)^2}{\sigma_i^2}\right) = 0 , \quad (3.10)$$

kde závislost $\mathbf{g}$ na λ je dána vztahem (3.3). V každé iteraci metody sečen je tedy třeba rovnici (3.3) vyřešit.

Řád konvergence metody sečen je přibližně roven 1.62, konvergence je tedy pomalejší než pro řád 2, jaký má metoda tečen [13]. To však platí na blízkém okolí kořene, tedy v případě, že chceme najít numerické řešení s poměrně vysokou přesností. Vzhledem k motivaci úlohy (3.7) zpravidla volíme méně přesné řešení, tedy připouštíme mírný overfitting nebo oversmoothing, za cenu snížení počtu časově náročných iterací. K nalezení dostatečně přesného řešení (u tokamaku COMPASS se používá podmínka $|\chi^2 - 1| < 0,05$) obvykle stačí méně než deset iterací [5].

3.2 Volba hodnotící funkce

Podmínka $\chi^2(\mathbf{g}) = 1$ určuje nadplochu v N -dimenzionálním prostoru všech možných vektorů $\mathbf{g}$. Na této nadploše potřebujeme najít jediné řešení, a to takové, které minimalizuje funkcionál $\|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda \Psi(\mathbf{g})$. Při vhodné volbě Ψ by se získané řešení mělo co nejvíce podobat skutečnému profilu emisivity plazmatu, na němž byla naměřena data $\mathbf{f}$. Otázkou nyní je, jaká volba Ψ je dostatečně univerzální, aby popsání metoda poskytovala použitelný výstup pro široké spektrum tvarů plazmatu vyskytujících se v typickém tokamaku.

3.2.1 Maximalizace entropie

Pokud nemáme k dispozici žádnou další a priori informaci o očekávaném tvaru plazmatu, nabízí se využití principu maximální entropie [7]. Jednotlivé pixely interpretujeme jako hodnoty jisté náhodné veličiny a hodnoty emisivity naměřené v pixelech (po nezbytné normalizaci) jako její rozdělení pravděpodobnosti. Toto rozdělení definované pro všechny pixely můžeme chápat například jako pravděpodobnost, že foton zachycený některým z detektorů pochází právě

z daného pixelu. Ta je při velkém počtu fotonů úměrná intenzitě vyzařování. Hledáme takové rozdělení, aby jeho entropie

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i \approx -\sum_i g_i \ln g_i \quad (3.11)$$

byla v rámci podmínky $\chi^2(\mathbf{g}) = 1$ maximální, tedy za Ψ dosadíme například $-S$ [5].

Pokud nějaké dodatečné předpoklady o plazmatu k dispozici máme, je zjevnou nevýhodou principu maximální entropie, že jich nevyužívá. Oproti několika následujícím tvarům hodnotícího funkcionálu je vyšší výpočetní náročnost, jak zmiňuje [7], která plyne zejména z faktu, že úloha není řešitelná analyticky.

3.2.2 Minimalizace velikosti prostorových derivací

Při tomografii plazmatu lze zpravidla předpokládat alespoň to, že prostorová závislost emisivity je hladká, nezatížená šumem [14]. Existuje několik možností vyjádření podmínky na hladkost rekonstrukce. Ve všech případech je však třeba počítat s tím, že budeme vždy hledat nejhladší přípustné řešení, ne pouze hladké. Samotná podmínka hladkosti tedy nezaručuje nalezení optimálního řešení.

Nejjednodušší hodnotící funkcí tohoto typu je $\Psi(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g}\|^2$, tedy minimalizace normy samotné rekonstrukce. Tímto způsobem však minimalizujeme nejen šum, ale i signál, a výsledek má nižší píky, než jaké odpovídají skutečnosti. Pro tomografii se tedy tento funkcionál nevyužívá [7].

Další možností je minimalizace normy některé derivace funkce g podle prostorových souřadnic, tedy x a y .⁵ I při použití takového funkcionálu je absolutní velikost píků funkce g podhodnocena, ačkoli zde zjednodušeně platí, že derivace vyšších řádů mají na velikost píků menší vliv [7].

Pro případ první derivace vypadá hodnotící funkcionál takto:

$$\Psi(g) = \|\nabla g\|^2 = \|\partial_x g\|^2 + \|\partial_y g\|^2, \quad (3.12)$$

pro druhou derivaci pak například takto [15]:

$$\Psi(g) = \|\Delta g\|^2 = \|\partial_{xx} g\|^2 + \|\partial_{yy} g\|^2. \quad (3.13)$$

Použití derivací umožňuje relativně snadno zavést další a priori informaci. Částice plazmatu se mohou relativně volně pohybovat podél ekvipotenciálních ploch magnetického pole. Můžeme tedy preferovat hladkost emisivity ve směru rovnoběžném s těmito plochami oproti hladkosti v kolmém směru.

$$\Psi(g) = a \|\partial_{\parallel} g\|^2 + b \|\partial_{\perp} g\|^2 \quad (3.14)$$

Toto takzvané anizotropní vyhlazování poskytuje symetričtější výsledky a v případě správnosti onoho předpokladu i přesnější. K výpočtu příslušných derivací je ale třeba znát aktuální tvar magnetického pole, který závisí i na vlastnostech plazmatu a liší se mezi jednotlivými výboji.

⁵ Jiné používané značení je r a z , podle válcových souřadnic s osou totožnou s hlavní osou tokamaku

Vzhledem k tomu, že nemáme k dispozici analytické vyjádření funkce g , ale jen konečný počet pixelů uspořádaných do matice, používáme místo derivací konečné diference. Díky tomu derivace vyšších řádů ztrácejí lokální význam. Pro eliminaci bodového šumu však druhá derivace postačuje. Diference prvního řádu pro pixely na okrajích matice, které přesahují mimo definiční obor g , lze dodefinovat jako nulové.

Vektor konečných diferencí je možné vyjádřit jako součin vhodné matice s vektorem g , pročež bývají tyto metody souhrnně označovány jako lineární regularizace [7, 15]. Regularizovaná úloha má tedy ve všech popsanych případech tvar (3.3).

3.2.3 Minimalizace Fisherovy informace

Fisherova informace je charakteristika náhodné veličiny, kterou lze spočítat jako

$$I_F = E \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 = \int \frac{(f'(x))^2}{f(x)} dx, \quad (3.15)$$

kde E značí střední hodnotu a f je hustota pravděpodobnosti [15]. Pro případ dvojrozměrné náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti f v proměnných x, y je odpovídajícím vztahem [7]

$$I_F = \int \left(\frac{(\partial_x f(x, y))^2 + 2|\partial_x f(x, y) \cdot \partial_y f(x, y)| + (\partial_y f(x, y))^2}{f(x, y)} \right) dx dy, \quad (3.16)$$

a konečně pro diskretní náhodnou veličinu g v proměnných x, y spočteme Fisherovu informaci takto:

$$I_F = \sum_{i=1}^N \frac{(|\partial_x g_i| + |\partial_y g_i|)^2}{g_i} = \partial g^T W \partial g. \quad (3.17)$$

Pro vektorový zápis Fisherovy informace jsme označili $\partial g_i = |\partial_x g_i| + |\partial_y g_i|$ a váhovou matici $W_{ij} = \delta_{ij}/g_i$, kde δ_{ij} je Kroneckerova funkce.

Metodu minimalizace Fisherovy informace lze považovat za minimalizaci vážené první derivace, kde váhovými koeficienty jsou převrácené hodnoty jednotlivých pixelů. Toto vážení má za následek přednostní eliminaci šumu v oblastech s nižší emisivitou, aniž by zároveň byly významně ovlivněny velikosti vysokých píků. Ukazuje se, že volba Fisherovy informace jako hodnotící funkce vskutku poskytuje kvalitnější rekonstrukce než výše popsané metody [15], ačkoli řešení úlohy je opět komplikováno její nelinearitou.

3.3 Řešení regularizované úlohy

Při hledání regularizačního parametru λ pomocí numerických iteračních metod je třeba v každém iteračním kroku řešit rovnici (3.3) nebo (3.4). Řešení g získané v posledním kroku je pak výslednou tomografickou rekonstrukcí. Pro optimalizaci rychlosti celkového algoritmu je klíčové, aby řešení příslušné rovnice trvalo co nejkratší dobu a aby byl v každém kroku potřeba co nejnižší počet těchto řešení; Právě tato část algoritmu má totiž na svědomí největší podíl výpočetního času [7].

Nejprve popíšeme řešení úlohy typu (3.3), kterou pro potřeby dalších úprav přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}\|^2 &= (\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f})^T(\mathbf{T}\mathbf{g} - \mathbf{f}) + \lambda(\mathbf{\Gamma}\mathbf{g})^T(\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}) = \\ &= \mathbf{g}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{g} - 2\mathbf{f}^T \mathbf{T} \mathbf{g} + \mathbf{f}^T \mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{g} = \min . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nyní levou stranu posledního vztahu zderivujeme podle všech složek vektoru $\mathbf{g}$ a položíme rovnu nulovému vektoru:

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{T} + \lambda \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}) \mathbf{g} - \mathbf{f}^T \mathbf{T} = \mathbf{0} . \quad (3.19)$$

Toto je soustava N lineárních rovnic pro N neznámých. Matice soustavy je symetrická a při vhodné volbě Tichonovovy matice $\mathbf{\Gamma}$ a nenulovém regularizačním parametru také regulární a pozitivně definitní. Díky tomu lze pro řešení použít algoritmy se složitostí nižší než $O(N^3)$, jako je Choleského dekompozice.

3.3.1 Řešení nelineárně regularizovaných úloh

Pokud je regularizovaná úloha v obecnějším tvaru (3.4), jako například při minimalizaci Fisherovy informace nebo maximalizaci entropie, bude soustava rovnic analogická soustavě (3.19) nelineární a obecně nebude možné vyřešit ji analyticky. Existuje několik univerzálních metod využitelných pro numerické řešení takové soustavy, ovšem zpravidla zaberou delší výpočetní čas.

Jednou z použitelných metod je metoda Newtonova zobecněná na vícerozměrné problémy. Její iterační krok spočívá v linearizaci řešené úlohy v bodě odpovídajícím aktuálnímu přiblížení řešení a následnému vyřešení vzniklé soustavy lineárních rovnic, čímž určíme přesnější přiblížení. Pro vyřešení úlohy (3.4) je tedy třeba řešit hned několik lineárních soustav rozměrem odpovídajících soustavě (3.19), a řešení je tedy několikanásobně pomalejší, v závislosti na požadované přesnosti. Toto není hlavním problémem Newtonovy metody, už proto, že jí trpí všechny iterační metody. Pro linearizaci úlohy je ovšem třeba pokaždé spočítat matici derivací jednotlivých rovnic soustavy podle všech složek vektoru $\mathbf{g}$, což bývá výpočetně náročné, ačkoli celkový počet potřebných iterací je poměrně nízký.

Druhou známou metodou je metoda nazývaná přímou iterací. Spočívá v převedení úlohy typu

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

na ekvivalentní úlohu

$$\Phi(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \quad (3.21)$$

a jejím iterativním řešením, přičemž iterační předpis má tvar $\mathbf{g}_k = \Phi(\mathbf{g}_{k-1})$. Tato metoda konverguje ve srovnání s metodou Newtonovou poměrně pomalu, v mnoha případech dokonce nekonverguje vůbec. Je však vhodné ji zmínit, protože pro některé volby hodnotícího funkcionálu se při správném použití osvědčuje.

3.3.2 Řešení minimalizace Fisherovy informace

Příkladem úlohy, pro jejíž řešení je vhodná jistá modifikace metody přímé iterace, je Tichonovova regularizace s Fisherovou informací v roli hodnotícího funkcionálu, jak byla popsána v odstavci 3.2.3. Úloha odpovídající (3.20) má tvar

$$\|\mathbf{T}\mathbf{g}_k - \mathbf{f}\|^2 + \lambda(\mathbf{D}\mathbf{g}_k)^T \mathbf{W}(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D}\mathbf{g}_k = \min. \quad (3.22)$$

Zde $\mathbf{D}$ je matice vyjadřující příslušné konečné difference a $W_{ij}(\mathbf{g}) = \delta_{ij}/g_i$. Předpokládejme nyní, že $\mathbf{g}_k$ a $\mathbf{g}_{k-1}$ jsou odlišné veličiny, a vyřešme úlohu pro $\mathbf{g}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{g}_k - \mathbf{f}^T \mathbf{T} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{W}(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D} \mathbf{g}_k &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_k &= (\mathbf{T}^T \mathbf{T} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{W}(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tento poslední vztah využijeme jako iterační předpis. Jako počáteční přiblížení lze volit například vektor $\mathbf{g}_0$ složený ze samých jedniček [15, 7]. Za dobrých podmínek posloupnost vektorů $\mathbf{g}_k$ konverguje k pevnému bodu funkce popsané vztahem (3.23). Kvalitu aktuálního přiblížení můžeme rozpoznat podle velikosti změny $\|\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}\|$ během posledního vykonaného iteračního kroku.

Nyní tedy můžeme řešit tomografickou úlohu pomocí dvou do sebe vnořených iteračních cyklů: Vnější cyklus hledá tak, aby platila podmínka $\chi^2(\mathbf{g}(\lambda)) = 1$, přičemž v každém průběhu vnějšího cyklu probíhá další cyklus, řešící nelineární minimalizaci Fisherovy informace.

3.4 Některá specifika algoritmu na tokamaku COMPASS

V současné verzi algoritmu používaného na tokamaku COMPASS je implementována minimalizace Fisherovy informace i řada dalších metod popsaných výše v této práci. Některé z popisovaných metod jsou však implementovány mírně odlišně. Tento odstavec vysvětluje odlišnosti podstatné pro další postup.

3.4.1 Organizace vícenásobných iteračních metod

Hierarchie iteračních cyklů při řešení úlohy minimalizace Fisherovy informace je obrácená, než jak byla popsána v odstavci 3.3.2. Ve vnitřním cyklu tedy probíhá metoda sečen hledající řešení úlohy $\chi^2(\mathbf{g}(\lambda)) = 1$, kde závislost $\mathbf{g}(\lambda)$ je dána lineárním přiblížením minimalizační úlohy. Celý tento cyklus pak probíhá opakovaně, přičemž pro každý průběh cyklu je aktualizováno ono lineární přiblížení. Tento postup lze chápat jako modifikaci iteračního předpisu (3.23) do tvaru

$$\mathbf{g}_k = (\mathbf{T}^T \mathbf{T} + \lambda(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D}^T \mathbf{W}(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{f}, \quad (3.24)$$

kde závislost λ na vstupním argumentu $\mathbf{g}_{k-1}$ je volena tak, aby výstup byl normován podmínkou $\chi^2(\mathbf{g}_k) = 1$. Pokud tedy iterace konverguje, dává stejný výsledek jako původní postup (3.23), v němž jsme volili λ dodatečně, ale podle stejné normovací podmínky.

Popsaný postup je uvažován i ve zbytku této práce.

3.4.2 Upravená Tichonovova regularizace

Tichonovova regularizace se nepoužívá ve své výchozí podobě (3.4), ale ve tvaru

$$\chi^2(\mathbf{g}) + \lambda \Psi(\mathbf{g}) = \min [7]. \quad (3.25)$$

Tento tvar lze zapsat také jako

$$\|\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2 + \lambda \Psi(\mathbf{g}) = \min, \quad (3.26)$$

kde $\tilde{T}_{ij} = T_{ij}/\sigma_i$, $\tilde{f}_i = f_i/\sigma_i$, tedy oproti původnímu tvaru jsou pouze jednotlivé rovnice soustavy váženy převrácenou hodnotou očekávané chyby příslušného detektoru. V kombinaci s požadavkem $\chi^2(\mathbf{g}) = 1$, který lze z definice (3.7) zapsat jako $\|\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2 = L$, můžeme tuto úlohu opět interpretovat jako hledání extrému funkce Ψ na varietě $\chi^2 = 1$ pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

3.4.3 Dodatečné a priori informace

Současný algoritmus klade na rekonstrukci i jiné požadavky než hladkost: Je vyžadována nezápornost rekonstrukce na celém definičním oboru a nulovost v těch oblastech, kde se nemůže vyskytovat plazma. Obojí lze řešit například rozšiřováním řešené soustavy o rovnice reprezentující virtuální detektory, které pozorují nulovou emisivitu v kritických oblastech, případně dalšími umělými zásahy do rekonstrukce během výpočtu. Takové zásahy mohou ovlivňovat konvergenci iteračních metod. Podrobněji je toto téma zpracováno v [7].

4 Modifikace algoritmu

Pokud má být tomografie použita pro zpětnou vazbu, tedy pro určování polohy plazmatu v reálném čase, je nutné, aby byl údaj o poloze k dispozici velmi rychle po naměření dat. Typicky je třeba provést rekonstrukci během jednotek až desítek milisekund [14, 16].

Řada tomografických metod, jako je Tichonovova regularizace s minimalizací Fisherovy informace, poskytuje kvalitní výsledky za cenu relativně dlouhého výpočetního času daného vysokým počtem iterací. Rychlost moderních počítačů se postupně zvyšuje, ale výkon potřebný k aplikaci takovýchto metod v reálném čase zatím běžně k dispozici není. Aktuální cestou je proto optimalizace rychlosti algoritmů.

Je známo několik způsobů, jak urychlit výpočet jednotlivých snímků tak, aby výsledný algoritmus byl lépe použitelný pro řízení tokamaku v reálném čase. Některé z nich budou vyzkoušeny v této kapitole s důrazem na metodu minimalizace Fisherovy informace. V rámci této kapitoly budou nově implementované algoritmy rovněž testovány, zejména proto, aby bylo možné rozhodnout, která cesta je vhodná pro další vývoj. Toto testování však prozatím bude probíhat na modelových datech.

4.1 Možnosti urychlení výpočtu

Implementace rekonstrukčního algoritmu popsaná v předchozí kapitole poskytuje poměrně široké možnosti pro optimalizaci výpočetního času. Popíšeme zde některé z nich.

4.1.1 Snížení počtu pixelů

Řešení soustavy N lineárních rovnic má výpočetní složitost $O(N^3)$ při použití klasické Gaussovy eliminace, pokročilejší algoritmy dosahují až $O(N^2)$. Vzhledem k tomu, že v problému pixelové tomografické inverze odpovídá N počtu pixelů rekonstruovaného obrazu, vyplatí se za účelem optimalizace výpočetního času snížit počet pixelů na rozumné minimum.

Pro řízení tokamaku je obvykle zásadním údajem poloha středu profilu vyzařování plazmatu, drobnější detaily struktury profilu lze v tomto případě pominout. Vhodný počet pixelů je tedy takový, který postačuje pro získání polohy středu s dostatečnou přesností. Je však také třeba mít na paměti, že zmíněné odhady složitosti platí pro velká N , zatímco pro nižší hodnoty může s klesajícím N klesat složitost pomaleji.

4.1.2 Alternativní metody řešení soustav lineárních rovnic

Již byla zmíněna složitost analytických metod pro řešení soustav lineárních rovnic. Existují však také numerické metody, jejichž složitost závisí na tom, kolik iterací se rozhodneme použít. Některé z nich mohou být efektivní pro řídké matice [7], což je i případ typické tomografické inverze. V současnosti je tato problematika ve vývoji, přičemž některé iterační metody se ukazují být srovnatelně rychlé jako metody analytické [7]. Je ovšem opět otázkou, jak přesné řešení je

třeba pro určení polohy středu.

4.1.3 Paralelizace, Rapid verze

Logickou možností urychlení výpočtu je paralelizace, případně jí příbuzná úprava algoritmu známá pod názvem Rapid verze. Ta spočívá ve výpočtu více snímků najednou, tedy v řešení jedné soustavy rovnic s více pravými stranami. Problémem této metody je, že každé pravé straně přísluší obecně jiná soustava rovnic. To lze ovšem obejít za cenu rezignace na přesnou definici úlohy. Pokud řešíme soustavu pro skupinu S snímků blízkých v čase, je možné za určitých okolností předpokládat, že tyto snímky budou navzájem podobné, a soustavu odvodit například z jejich aritmetického průměru [17]. Označme jednotlivé snímky $\mathbf{g}_1$ až $\mathbf{g}_S$ a jejich průměr $\bar{\mathbf{g}}$. Pak v případě lineární regularizace řešíme úlohu

$$\|\tilde{T} \mathbf{g}_i - \tilde{f}\|^2 + \lambda \|\Gamma \mathbf{g}_i\|^2 = \min \quad \forall i \quad (4.1)$$

za podmínky kladené na λ

$$\chi^2(\bar{\mathbf{g}}(\lambda)) = \frac{1}{S} \sum_i \chi^2(\mathbf{g}_i(\lambda)) = 1 \quad (4.2)$$

Pro regularizaci nelineární je situace složitější. Pokud rovnicí (4.1) budeme nyní rozumět lineární přiblížení nelineární úlohy, pak se musíme vypořádat s faktem, že matice Γ je pro každé $\mathbf{g}_i$ jiná. Uveďme příklad řešení tohoto problému pro minimalizaci Fisherovy informace:

$$\|\tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g}_i - \mathbf{f}\|^2 + (\mathbf{D} \mathbf{g}_i)^T \mathbf{W}(\bar{\mathbf{g}}) \mathbf{D} \mathbf{g}_i = \min \quad (4.3)$$

opět za podmínky (4.2). Nyní můžeme opakovaně řešit (4.3) jako soustavu lineárních rovnic pro pravé strany $\mathbf{g}_1$ až $\mathbf{g}_S$, představující lineární přiblížení minimalizace složené Fisherovy informace, přičemž pokaždé aktualizujeme pouze složenou váhovou matici $\mathbf{W}(\bar{\mathbf{g}})$, vypočtenou z vektoru $\bar{\mathbf{g}}$ průměrovaného přes všechny snímky.

Tato metoda je běžně používaná v povýbojové tomografii, přičemž dosažený koeficient urychlení výpočtu činí asi $S/3$, kde S je počet snímků rekonstruovaných zároveň [7]. Pro tomografii v reálném čase bohužel není Rapid verze o mnoho vhodnější než počítání každého snímku zvlášť, protože čas mezi vstupem dat a výstupem první rekonstrukce se oproti předchozímu stavu nezlepšil.

4.1.4 Vhodná volba počátečního přiblížení

Jednou z nadějných cest k tomografii v reálném čase je snaha o snížení počtu iteračních kroků potřebných k nalezení dostatečně přesného řešení. Algoritmus minimalizace Fisherovy informace se dvěma vnořenými iteračními cykly vyžaduje k dostatečné konvergenci jednoho snímku vykonat tři průběhy vnějšího cyklu a v každém z těchto průběhů nanejvýš deset kroků cyklu vnitřního, přičemž v každém kroku vnitřního cyklu se řeší soustava lineárních rovnic o rozměru odpovídajícím počtu pixelů [7].

Potřebný počet iterací lze kromě výběru rychle konvergujících iteračních metod redukovat také použitím přesnějšího počátečního přiblížení vektoru $\mathbf{g}$, než jakým je vektor složený ze

samých jedniček. Toto přiblížení můžeme získat například vyřešením úlohy nejprve pro menší rozlišení, následnou interpolací a dosazením do úlohy o původní dimenzi. Řešení menší soustavy je rychlejší, otázkou zůstává, kolik iterací té větší soustavy tímto krokem ušetříme a zejména kolik ušetříme času.

Další možností, která se zde nabízí, je použití předchozího rekonstruovaného snímku jako počátečního odhadu pro rekonstrukci dalšího snímku. To může přinést značné urychlení především v případě klidného plazmatu, kdy jsou po sobě jdoucí snímky téměř identické. Problém může nastat tehdy, když se tvar plazmatu mezi dvěma snímky výrazně změní. Je třeba, aby iterační algoritmus byl dostatečně robustní a konvergoval i pro počáteční přiblížení vzdálené od správného řešení. V opačném případě by taková náhlá změna poškodila i následující rekonstruované snímky.

Extrémní variantou urychlení iterace s využitím předchozí rekonstrukce jako počátečního přiblížení je iterace na proměnných datech. Při ní redukuje počet iteračních kroků povolených pro výpočet jednoho snímku například na jeden. Tímto postupem tedy můžeme dosáhnout urychlení výpočtu přibližně o jeden řád. Výpočet takovou metodou trvá pro každý snímek zhruba stejně dlouho, nezávisle na tom, jak moc se tento snímek liší od předchozího.

Nevýhoda iterace na proměnných datech je zřejmá: Na odlišnosti od předchozího snímku bude záviset přesnost rekonstrukce. Při rychlé změně tvaru plazmatu bude navíc i při použití robustní iterační metody poškozeno hned několik následujících snímků, než iterace opět zkonverguje do blízkosti aktuálního správného řešení. Při použití této metody pro řízení tokamaku je tedy vhodné mít k dispozici nějaký indikátor kvality rekonstrukce aktuálního snímku, aby bylo možné vyloučit příliš poškozené snímky, v horším případě indikovat definitivní ztrátu konvergence.

4.2 Rozpoznání ztráty konvergence

Za účelem vyloučení defektních snímků z procesu řízení tokamaku je třeba stanovit vhodné kritérium, podle něhož bude možné okamžitě po rekonstrukci rozhodnout, jestli je třeba tento snímek vyloučit. Po snímcích požadujeme, aby splňovaly rovnost $\chi^2(\mathbf{g}) = 1$ a aby v rámci možností nabývaly minimální hodnoty jistého funkcionálu. Poškozené snímky tedy z *definice* poznáme podle toho, že některé z těchto kritérií nesplňují.

V případě lineárních regularizací je rovnost $\chi^2(\mathbf{g}) = 1$ dokonce jediným kritériem kvality rekonstrukce. Díky tomu, že jejich minimalizační úlohu lze analyticky vyřešit v jediném kroku, totiž to druhé kritérium splňují vždy. Kritérium χ^2 je vhodné i proto, že při iteraci na proměnných datech je jeho hodnota počítána pro každý vystupující snímek, není tedy nutné provádět výpočty navíc. Přitom hodnota χ^2 nezávisí na dosavadním průběhu iterace, ale pouze na aktuálním snímku.

U nelineárních metod, jako je minimalizace Fisherovy informace, lze kritérium χ^2 použít také, ovšem samotné toto kritérium už nezaručuje kvalitní rekonstrukci. Je tedy vhodné nějak posoudit, zda aktuální snímek skutečně minimalizuje hodnotící funkcionál. To obecně není jednoduchý úkol, avšak v některých případech lze získat alespoň přibližnou představu.

$$(\mathbf{D} \mathbf{g}_k)^T \mathbf{W}(\mathbf{g}_{k-1}) \mathbf{D} \mathbf{g}_k \quad (4.4)$$

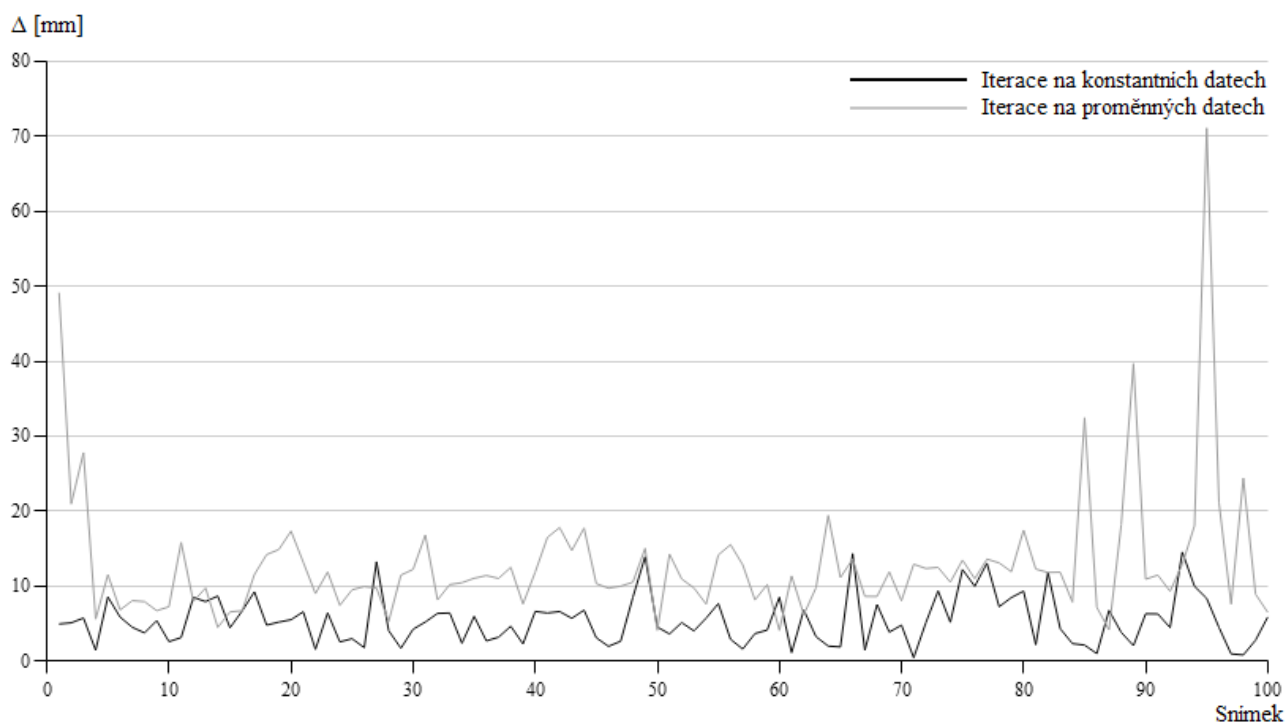
Lze chápat jako funkci dvou proměnných: $\mathbf{g}_k$, v níž je (po derivaci) lineární, a $\mathbf{g}_{k-1}$. Přitom v proměnné $\mathbf{g}_k$ řešíme úlohu minimalizace tohoto funkcionálu. Skutečná hodnota Fisherovy informace by byla minimalizována v případě dodání požadavku rovnosti obou těchto proměnných. Nabízí se tedy posoudit kvalitu řešení minimalizační úlohy podle vzdálenosti výsledku $\mathbf{g}_k$ od hodnoty neměnné $\mathbf{g}_{k-1}$. Přitom jejich větší vzdálenost lze interpretovat jako větší odlišnost linearizované minimalizační úlohy od úlohy přesné. Složitost výpočtu vzdálenosti dvou vektorů $\mathbf{g}$ je rovna $O(N)$, kde N je počet pixelů. Při dostatečně velkém N je tedy možné tuto složitost zanedbat ve srovnání s řešením minimalizační úlohy. Účelnost zavedení kritéria $\|\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}\|$ bude diskutována v kapitole 5.

4.3 Implementace iterace na proměnných datech

Algoritmus minimalizace Fisherovy informace se dvěma vnořenými cykly, popsany v odstavcích 3.3.2 a 3.4.1, řeší v každém kroku tomografickou soustavu rovnic s naměřenými daty v roli pravé strany. Triviální úprava tohoto algoritmu pro iteraci na proměnných datech tedy může vypadat takto: Místo tří průběhů vnějšího cyklu necháme tento cyklus běžet po celou dobu trvání rekonstruovaného výboje; Pokaždé, když máme řešit tomografickou rovnici, dosadíme za pravou stranu aktuálně naměřená data; Pokaždé, když je tomografická rovnice vyřešena, vrátíme získané přiblížení vektoru $\mathbf{g}$ jako rekonstrukci aktuálního snímku.

Pokud trváme na rekonstrukci v reálném čase, je nyní nejkratší možný interval mezi jednotlivými vstupy dat (a také mezi jednotlivými výstupy) určen trváním jednoho iteračního kroku. Přitom kratší výpočet iteračního kroku dovoluje nejen vyšší vzorkovací frekvenci, ale i přesnější rekonstrukce. Lze totiž očekávat, že při vyšší frekvenci se sousední snímky budou navzájem lišit méně. Použití pro zpětnou vazbu v tokamaku navíc klade na rychlost výpočtu jednoho snímku konkrétní omezení, totiž nejvýše desítky milisekund zmíněné například v [14].

Možným problémem popsané triviální iterace na proměnných datech je její jistá nerovnoměrnost. Výpočet snímku prostou iterací na konstantních datech spočívá v numerickém řešení rovnice $\chi^2(\mathbf{g}(\lambda)) = 1$ metodou sečen, přičemž závislost $\mathbf{g}$ na λ je dána minimalizační podmínkou $\chi^2(\mathbf{g}) + \lambda (\mathbf{D}\mathbf{g})^T \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{g} = \min$. Přitom každých nanejvýš deset iteračních kroků je váhová matice $\mathbf{W}$ aktualizována, aby se úloha přiblížila té původní nelineární. Aktualizace váhové matice spolu s následnou řadou iteračních kroků metody sečen představuje jeden krok vnějšího iteračního cyklu. Tato aktualizace mění závislost $\mathbf{g}$ na λ a tím také úlohu řešenou metodou sečen. Tak se můžeme opět vzdálit od řešení $\chi^2(\mathbf{g}(\lambda)) = 1$, ačkoli před aktualizací bylo naše numerické řešení již blízko tomu přesnému. Při iteraci na konstantních datech příslušejících jedinému snímku to problém nepředstavuje, protože jako výsledek je vráceno až to poslední přiblížení, které už podmínku na χ^2 s dostatečnou přesností splňuje. Pro metodu iterace na proměnných datech by to však mohlo představovat závažný problém, vezmeme-li v úvahu, že by metoda vracela řadu nepřesných snímků po každé aktualizaci váhové matice, tedy zhruba po každých deseti krocích.



Obr. 4.1: Časový vývoj vzdálenosti rekonstruovaného středu od středu modelových dat Δ ;
Porovnání původního algoritmu se dvěma vnořenými cykly a triviální implementace
iterace na proměnných datech

Popsaný algoritmus iterace na proměnných datech byl v rámci práce implementován a následně otestován na modelových datech. Těmito modelovými daty byla posloupnost profilů ve tvaru dvojrozměrné Gaussovy funkce na definičním oboru odpovídajícím tvaru komory tokamaku COMPASS. Mimo komoru byla modelová data nastavena na nulu. Mezi jednotlivými snímky se měnila poloha středu Gaussovy funkce. Modelová data byla převedena na modelový vstup z detektorů a následně rekonstruována. U původních i u rekonstruovaných profilů pak byla určena geometrická těžiště a jejich vzájemná vzdálenost interpretována jako ukazatel kvality rekonstrukce.

Časový vývoj odchylky středu rekonstrukce metodou iterace na proměnných datech od středu modelového profilu ukazuje obrázek 4.1, v němž je pro porovnání vyznačena také odchylka středu rekonstrukce získané tradiční metodou iterace jednotlivých snímků se dvěma vnořenými cykly. Váhová matice byla přepočítávána pro každý desátý snímek. Ačkoli očekávaná periodicitu odchylky středů příliš zjevná není, odchylka iterace na proměnných datech je zpravidla větší než odchylka původního algoritmu. Během posledních dvaceti rekonstruovaných snímků se pak projevuje významná nestabilita.

4.3.1 Sjednocení iteračních cyklů

Aby nedocházelo k periodickému narušení konvergence iterace na proměnných datech, je zřejmě vhodné, aby všechny iterační kroky byly rovnocenné. V případě minimalizace Fisherovy informace je tedy nutné nějakým způsobem sjednotit dva vnořené iterační cykly do jednoho.

Nejjednodušším způsobem, jak cykly sjednotit, je úplně vynechání přepočtu váhové matice. Tuto matici lze zvolit například tak, aby odpovídala Gaussově funkci se středem v oblasti středu komory tokamaku. V průběhu celého následujícího výpočtu pak váhová matice zůstává konstantní. Nejde už však o minimalizaci Fisherovy informace, ale pouze o minimalizaci nějakého jejího přiblížení, které je tím přesnější, čím více se aktuální profil plazmatu podobá Gaussově funkci. V podstatě by se tedy jednalo o návrat k lineární regularizaci. Tento postup tedy nebude v dalším textu uvažován.

Z určitého hlediska opačným přístupem je přepočítávání váhové matice v každém kroku. V tomto případě iteračně optimalizujeme vektor $\mathbf{g}$ metodou přímé iterace popsanou v odstavci 3.3.2 a zároveň hledáme parametr λ metodou sečen. Vytváříme přitom jedinou posloupnost přiblížení $\mathbf{g}$, v každém kroku vypočítáváme další $\mathbf{g}$ řešením úlohy s novou váhovou maticí a novým parametrem λ . Tento postup lze chápat opět jako dva vnořené iterační cykly, přičemž jsme u vnitřního cyklu snížili nároky na přesnost tak, že stačí pouze jeden jeho průběh. Na rozdíl od předchozího popsaného postupu tentokrát nedochází ke zjednodušení hodnotícího funkcionálu.

Vzhledem k tomu, že váhová matice je diagonální, má její výpočet složitost pouze $O(N)$. Zajímavější otázkou je konvergence této nové metody. Řešíme úlohu pro vektorovou proměnnou $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N, \lambda)$ s využitím kombinace dvou numerických metod, které se mohou navzájem ovlivňovat. Nejvýznamnějším problémem v tomto směru bude pravděpodobně konvergence metody sečen používané pro hledání λ . Její vztah pro výpočet následující iterace totiž závisí na dvou předchozích.

V případě metod, jejichž iterační předpis závisí pouze na jedné předchozí iteraci, je jediným problémem fakt, že jimi řešená úloha závisí kromě λ ještě na váhové matici. Získané přesnější přiblížení je pak používáno v následujícím iteračním kroku, přičemž už je v jistém smyslu zastaralé, protože úloha se změnila se změnou váhové matice, zatímco ono přiblížení λ je stále přiblížením řešení úlohy z minulého kroku. Problém nenastává, pokud lze spoléhat na to, že změny v plazmatu budou po většinu času dostatečně pomalé, aby řešení úlohy z jednoho iteračního kroku bylo dostatečně dobrým přiblížením úlohy následující.

Pokud však iterační předpis pro λ závisí na dvou předchozích iteracích, výstupní hodnota je přiblížením řešení nepříliš korektní úlohy vzniklé smícháním úloh řešených v předchozích dvou krocích a potenciálně nemusí aproximovat řešení ani jedné z původních úloh.

4.3.2 Testování iterace s průběžným přepočtem $\mathbf{W}$

Za účelem ověření vlastností metody sečen s přepočtem váhové matice v každém kroku byla tato metoda nejprve použita jako iterace na konstantních datech (modelových), tedy pro výpočet každého snímku zvlášť.

Prvním kvalitativním pozorováním je skutečnost, že vektor $\mathbf{g}$ složený ze samých jedniček není vhodným počátečním přiblížením pro tuto metodu. Ke konvergenci metody je pak potřeba obvykle několikanásobně vyšší počet iterací než ke konvergenci původní metody se dvěma vnořenými cykly, nehledě na to, že u některých snímků žádná zjevná konvergence nenastává.

Pokud za počáteční přiblížení použijeme gaussovský pík umístěný uprostřed komory, rekonstrukce modelových dat se zrychlí na úroveň srovnatelnou s tradiční metodou. Vzhledem k tomu, že modelová data mají rovněž podobu gaussovského píku (s obecnou polohou), není jisté, jaké počáteční přiblížení by bylo vhodné při použití této metody k rekonstrukci reálných dat.

Druhé pozorování říká, že rekonstrukce jednotlivých snímků iterací s průběžným přepočtem váhové matice se zdají být hladší než rekonstrukce prováděné metodou se dvěma vnořenými cykly (viz např. obrázek 5.1 v následující kapitole). To lze vysvětlit tak, že iterace s průběžným přepočtem $\mathbf{W}$ řeší přesněji tu část úlohy, která je zaměřena na minimalizaci Fisherovy informace. U tradiční metody totiž po stanovení posledního linearizovaného přiblížení Fisherova funkcionálu proběhne ještě několik iterací metody sečen pro úlohu $\chi^2 = 1$ a vrácené řešení tudíž neminimalizuje skutečnou Fisherovu informaci, ale to její poslední přiblížení.

4.3.3 Testování na proměnných datech

Po vyzkoušení metody s průběžným přepočtem $\mathbf{W}$ na konstantních datech byla tato metoda testována i s použitím iterace na datech proměnných. Za proměnná modelová data byl opět použit gaussovský pík pohybující se po ploše průřezu komorou. Mezi jednotlivými snímky se poloha píku měnila náhodně o jeden až deset centimetrů.

Obrázek 4.2 ukazuje jednu ze získaných časových závislostí odchylky středu rekonstrukce od středu modelových dat a obrázek 4.3 odpovídající časovou závislost veličiny χ^2 . Odchylka středu se nyní už výrazně neodlišuje od odchylky získané tradiční metodou, jen vysoká odchylka na začátku rekonstrukce je patrně způsobena nevhodnou volbou počátečního přiblížení.

Pozorované vysoké i hluboké píky veličiny χ^2 mohou být způsobeny výše popsanou nestabilitou metody tečen, vzhledem k tomu, že jim odpovídají hodnoty parametru λ vzdálené od předcházejících hodnot. Dobrou zprávou je, že tyto odchylky jsou napraveny hned u následujícího snímku a nedochází k dlouhodobé ztrátě konvergence. Možným vysvětlením tohoto jevu je, že metoda tečen je stabilnější na relativně velkých vzdálenostech v λ , jimž odpovídá velký rozdíl v χ^2 , protože se příliš neprojeví relativně malé odchylky v závislosti χ^2 na λ způsobené nekonstantní váhovou maticí. Takové vysvětlení však příliš velkou jistotu neposkytuje, protože není zřejmé, zda zmíněné odchylky budou relativně malé i při rekonstrukci reálných dat. Proto by bylo vhodné se podobným nestabilitám metody nějak vyhnout.

4.3.4 Pokusy o zvýšení stability metody

Jednou z možností, jak zvýšit odolnost metody sečen proti změnám v parametrech, je uměle zpomalit časový vývoj těchto parametrů. To lze provést například tak, že do řešené úlohy nedosadíme okamžitou hodnotu parametru, ale průměr spočtený z několika posledních hodnot. V rámci této práce bylo vyzkoušeno zpomalení vývoje váhové matice pomocí počítání exponenciálního klouzavého průměru z vektoru $\mathbf{g}$, na němž váhová matice závisí:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{W} \, k+1} = (1 - e) \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{W} \, k} + e \cdot \mathbf{g}_{k+1} \quad , \quad (4.5)$$

kde e značí váhu exponenciálního klouzavého průměru nabývajících hodnot od 0 do 1. Veličina $\mathbf{g}_w$ představuje onen klouzavý průměr a je určena pouze pro výpočet váhové matice vztahem $W_{ij} = \delta_{ij}/g_{wi}$, zatímco $\mathbf{g}$ je okamžitá hodnota rekonstrukce, která je posléze vrácena.

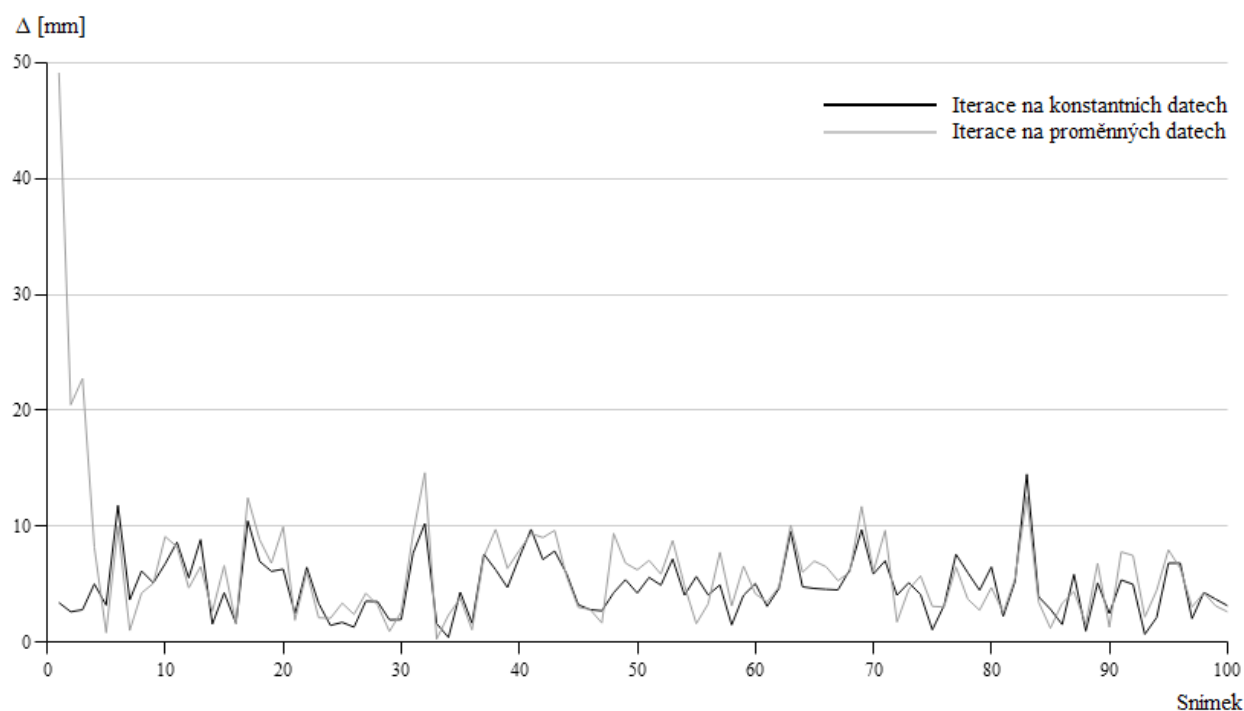
Bohužel se ukazuje, že žádoucí efekt nastává až pro poměrně nízké hodnoty $e < 0.1$. V takovém případě klouzavý průměr $\mathbf{g}_w$ značně zaostává za aktuálním stavem a spolu s ním zaostává i používané přiblížení Fisherova funkcionálu.

Používaná metoda sečen vykazuje poměrně rychlou konvergenci, to ovšem platí na blízkém okolí kořene. Z hlediska stability iterace na proměnných datech tato metoda může být spíše kontraproduktivní. Je tedy vhodné ověřit chování jiných metod, jejichž iterační předpis závisí jen na jedné předchozí iteraci. Takovou metodou je například metoda třetiv, známá též jako *regula falsi*. Ta podobně jako metoda sečen prokládá dvojici bodů přímkou a hledá kořen získaného lineárního přiblížení úlohy, na rozdíl od metody sečen je však jeden z těchto bodů po celou dobu iterace konstantní. Iterační předpis pro úlohu $\phi(\lambda) = 0$ zní

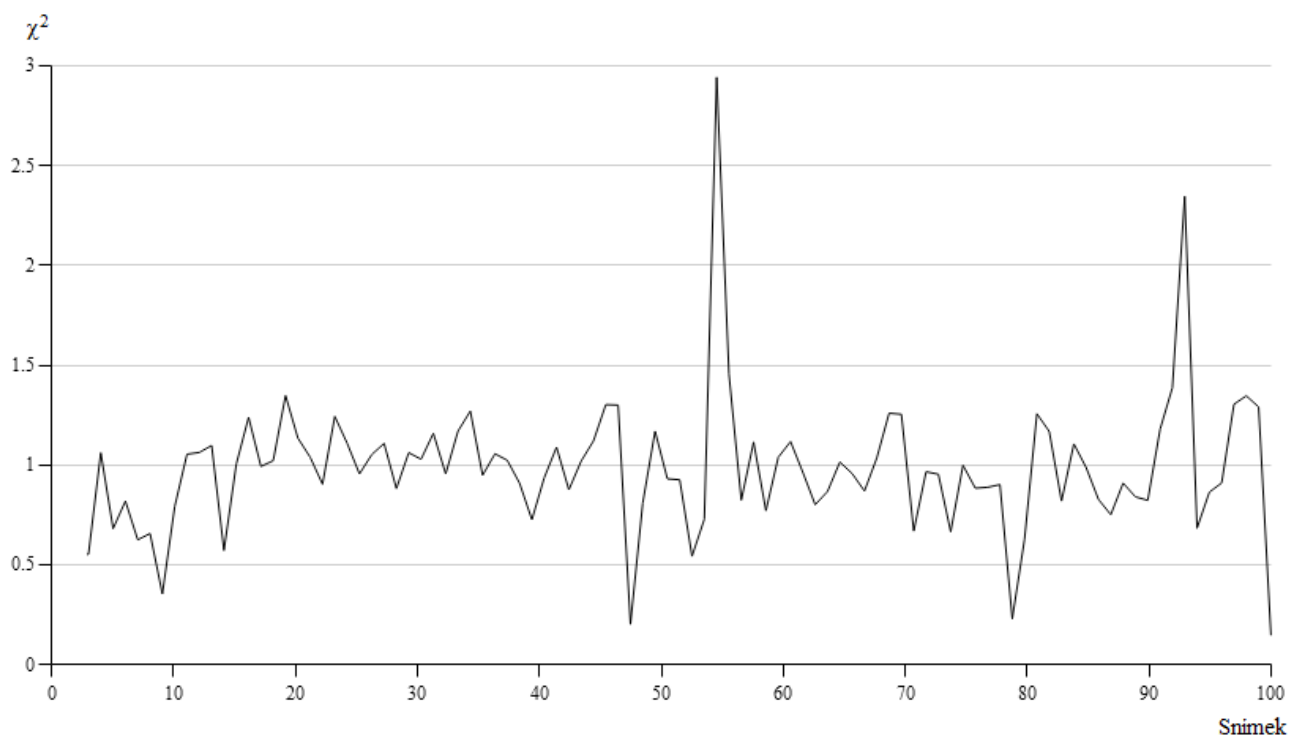
$$\lambda_i = \lambda_{i-1} - \phi(\lambda_{i-1}) \frac{\lambda_{i-1} - \lambda_0}{\phi(\lambda_{i-1}) - \phi_0}, \quad (4.6)$$

kde λ_0 a ϕ_0 jsou souřadnice toho pevného bodu. Tato dvě čísla je třeba zvolit nejlépe tak, aby platilo $\phi(\lambda_0) = \phi_0$, jak praví definice metody třetiv. To bohužel není zcela možné, protože závislost se mění s každým přepočtem váhové matice.

Test na modelových datech vsutku ukazuje, že použití metody třetiv eliminuje odlehle hodnoty χ^2 , aniž by došlo ke znatelnému zhoršení kvality rekonstrukcí.



Obr. 4.2: Časový vývoj vzdálenosti rekonstruovaného středu od středu modelových dat Δ ;
 Porovnání původního algoritmu se dvěma vnořenými cykly a iterace
 na proměnných datech s průběžným přepočtem váhové matice



Obr. 4.3: Časový vývoj veličiny χ^2 pro iteraci na proměnných datech
 odpovídající stejným modelovým datům jako obrázek 4.2

5 Testování na reálných datech

Doposud bylo vyvinuto několik modifikací tomografického algoritmu umožňujících iteraci na proměnných datech. Jejich funkčnost, popřípadě stabilita konvergence byla ověřena na modelových datech. Cílem této kapitoly je ověřit vlastnosti těchto modifikací na datech získaných ze skutečného tokamaku, konkrétně jde o tokamak COMPASS.

5.1 Dostupná data

V době psaní této práce fungovaly na tokamaku COMPASS AXUV bolometry ve čtyřech diagnostických portech. Detektory měkkého rentgenového záření (SXR) byly instalovány zatím pouze ve dvou z plánovaných čtyř portů, navíc poskytovaly nepříliš kvalitní data ukazující na jejich špatnou kalibraci. Pro potřeby této kapitoly proto budou využívána data z AXUV bolometrů.

Používaná data byla naměřena během výbojů 2648 a 2705. V obou případech jsou k dispozici také údaje z magnetických senzorů, je tedy možné porovnat polohu středu plazmatu určenou oběma metodami.

Výstup tomografických metod má tvar matice pixelů. Za účelem porovnávání údajů o poloze plazmatu je třeba implementovat algoritmus určující střed profilu plazmatu z této matice. Nejjednodušším takovým algoritmem je výpočet těžiště emisivity. Poměrně výhodný je i jeho výpočetní čas, má složitost $O(N)$. Nevýhodou je jistá nekompatibilita s výsledkem magnetického měření, který je odvozen z elektrického proudu v plazmatu a nemusí odpovídat právě těžišti emisivity. Tímto nedostatkem však patrně trpí i řada dalších algoritmů hledajících střed rekonstruovaného profilu. Navíc jde o nedostatek pouze z hlediska případné kontroly správnosti určení polohy středu porovnáním výstupů dvou různých metod.

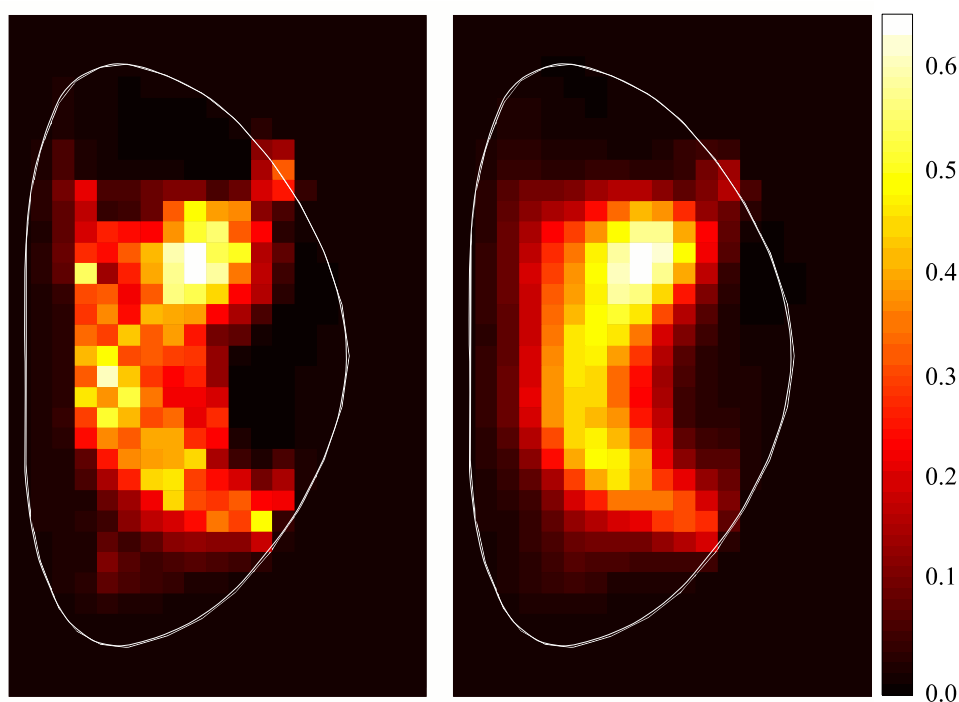
Dalším problémem algoritmu počítajícího těžiště je citlivost na vysoké artefakty, které se mohou vyskytovat na okraji snímků. Jejich vliv lze zmírnit například vhodným oříznutím nejvyšších hodnot emisivity.

Mimo popsané algoritmy se nabízí řada dalších způsobů, jak na snímku najít střed plazmatu. V této práci však budou používány jen algoritmy založené na výpočtu těžiště.

5.2 Konvergence iterace na proměnných datech

Konvergence jednotlivých snímků a odolnost nových rekonstrukčních algoritmů proti rychlým změnám polohy plazmatu již byla ověřena na modelových datech. Reálná data se od těch modelových poněkud odlišují a je tedy vhodné vyzkoušet vlastnosti algoritmů i na nich.

Jako první byla vyzkoušena konvergence výpočtu jednotlivých snímků algoritmem s průběžným přepočtem váhové matice na konstantních datech, který byl vyvinut jako základ pro pozdější iteraci na proměnných datech. Obrázek 5.1 ukazuje výstup tohoto algoritmu v porovnání s původním algoritmem s vnořenými cykly.



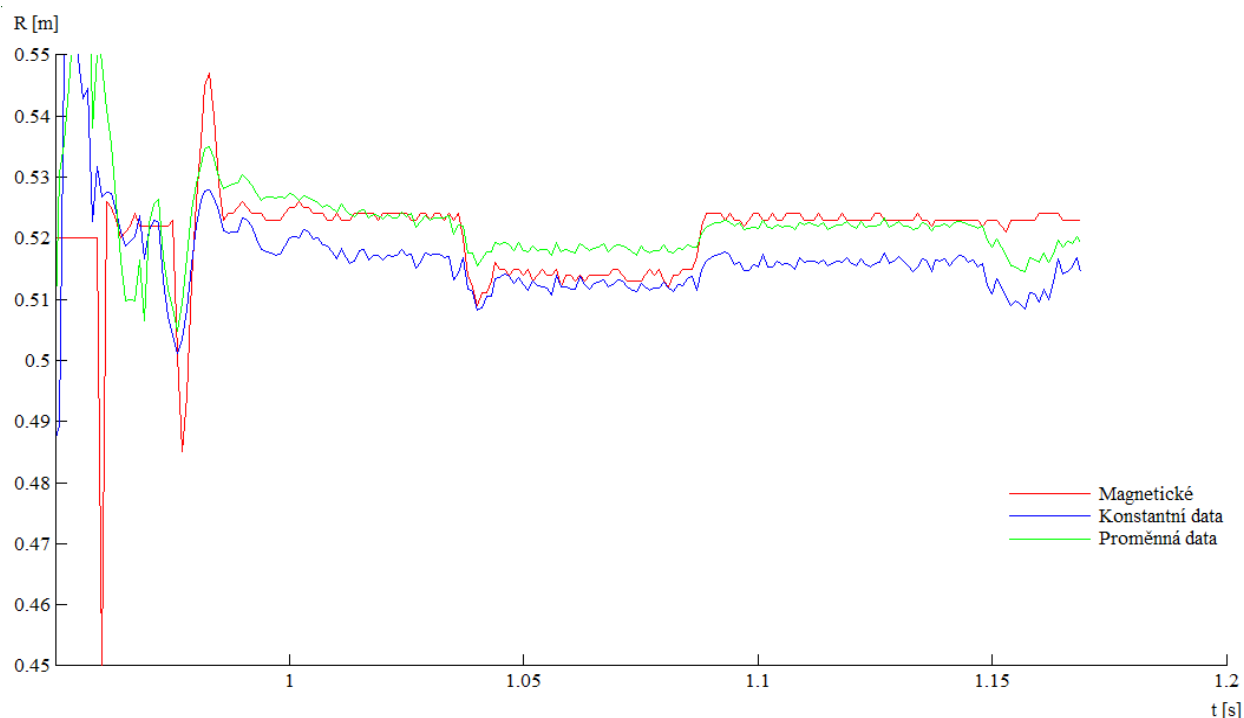
Obr. 5.1: Porovnání rekonstrukce téhož snímku (COMPASS, výboj 2648, čas 1,010 s) algoritmem s vnořenými cykly (vlevo) a algoritmem s průběžným přepočtem váhové matice

Ukazuje se, že nový algoritmus konverguje pro téměř všechny rekonstruované snímky včetně těch značně odlišných od zvoleného počátečního přiblížení, jaké se vyskytují například na začátku výboje. Jak je patrné z obrázku 5.1, typická rekonstrukce je dokonce hladší, než jakou poskytuje původní algoritmus, splňuje tedy přesněji kritérium minimalizace Fisherovy informace.

Nyní je třeba ověřit konvergenci algoritmu s průběžným přepočtem váhové matice na proměnných datech. Na rozdíl od testování na modelových datech nyní nemáme k dispozici referenční snímek, s nímž bychom mohli porovnat výsledek rekonstrukce. Abychom odhadli kvalitu rekonstrukce, budeme snímky získané iterací na proměnných datech porovnávat s výstupy tradiční metody rekonstrukce jednotlivých snímků. Tato metoda nemusí nutně poskytovat kvalitnější výsledky, ale přinejmenším u ní nehrozí dlouhodobá ztráta konvergence.

Obrázek 5.2 ukazuje časový vývoj radiální souřadnice středu plazmatu určené původním algoritmem na konstantních datech, iterací na proměnných datech a pro srovnání také odpovídající údaj z magnetických senzorů. Poloha středu byla v tomto případě určována prostým výpočtem těžiště ze snímku o rozlišení 20×34 pixelů.

Data odpovídají výboji 2648, během něhož bylo plazma záměrně vychýleno o deset milimetrů v radiálním směru (měřeno magneticky). Vychýlení je pozorovatelné i na výstupech obou tomografických metod, ačkoli nedosahuje oněch deseti milimetrů. Pozoruhodná je také jakási systematická chyba, kvůli níž se výsledky obou tomografických metod navzájem liší o 5 až 10 mm.



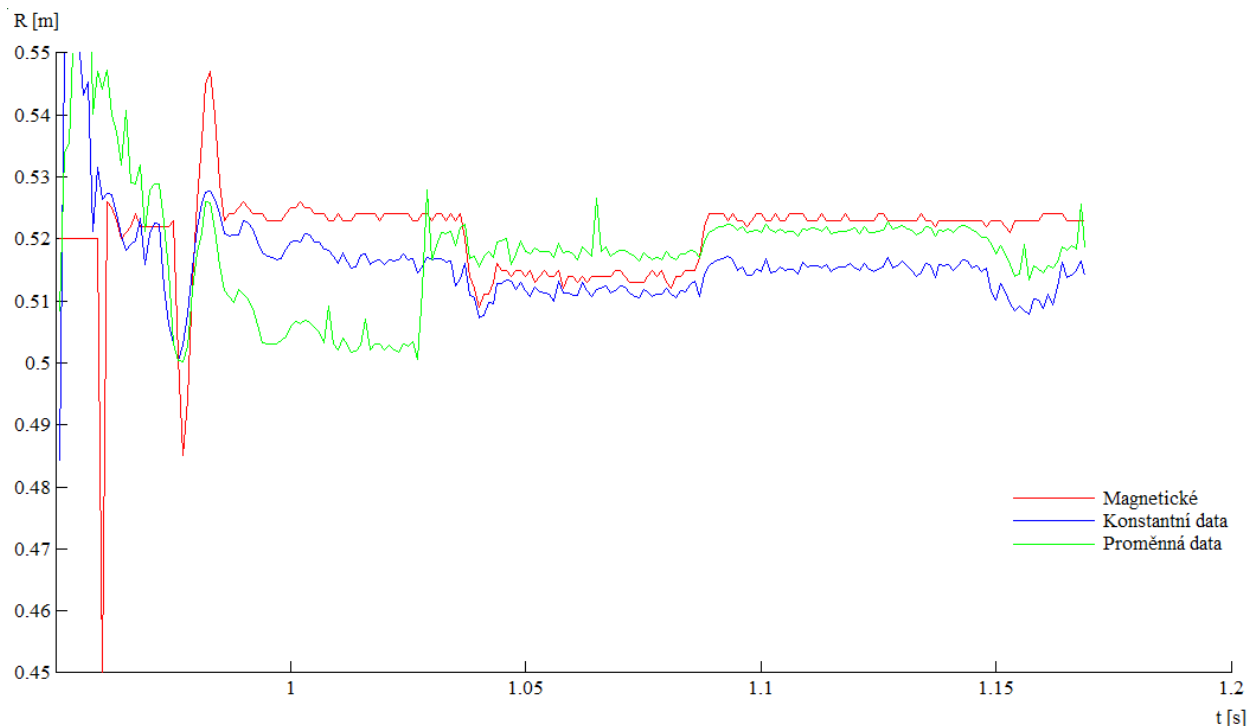
Obr. 5.2: Porovnání časového vývoje radiální souřadnice středu plazmatu R během výboje 2648 na tokamaku COMPASS; Určováno magneticky a tomografií na konstantních a proměnných datech

Iterace na proměnných datech v tomto případě využívala metodu sečen pro určování λ . Během celého výboje nedošlo k dlouhodobé ztrátě konvergence navzdory zmíněným záměrným posunům plazmatu během měření a chaotickému vývoji na samém počátku výboje.

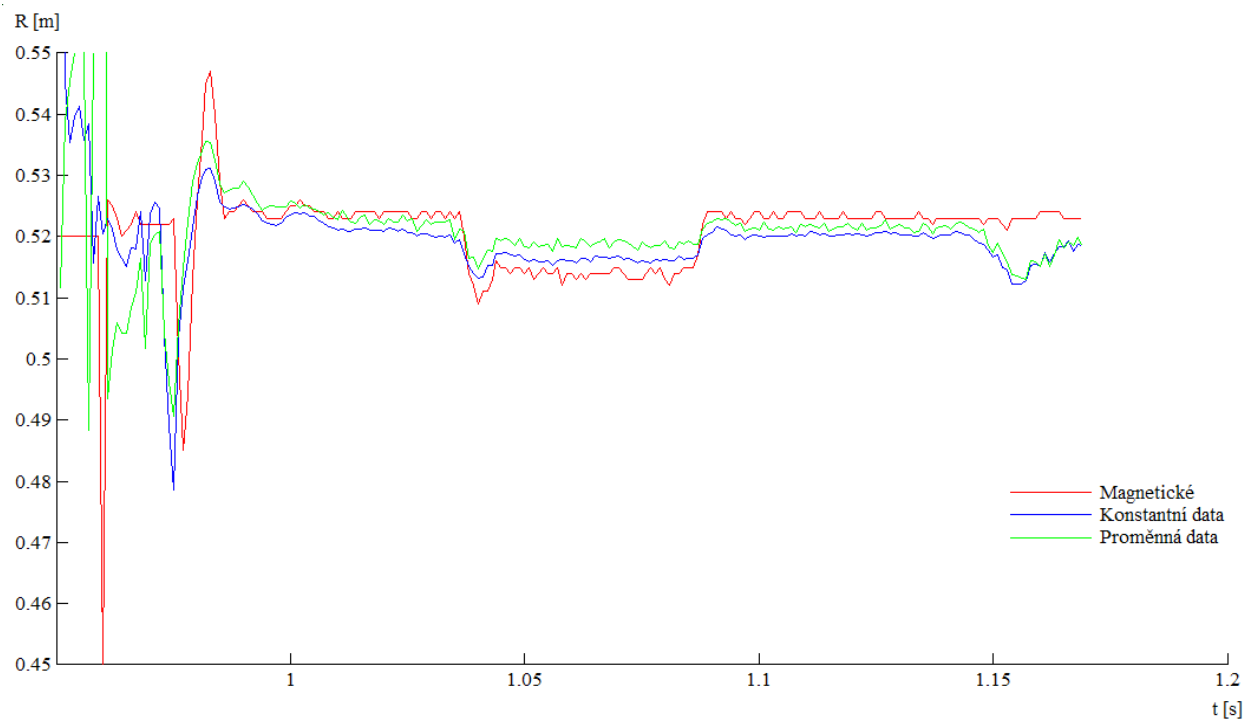
Ukazuje se ovšem, že vývoj iterace na proměnných datech závisí mimo jiné na počátečním snímku rekonstruovaného časového úseku, tedy pro tentýž výboj dostáváme odlišné rekonstrukce, pokud iteraci zahájíme v jiném okamžiku. V některých případech dlouhodobá ztráta konvergence pozorována byla, jak ukazuje obrázek 5.3. To ovšem platí opět pouze pro případ použití metody sečen. Metoda tětív se zdá být v tomto ohledu stabilnější, při jejím použití se nezdařilo vyvolat ztrátu konvergence na žádném z rekonstruovaných výbojů.

V rámci testování konvergence algoritmů byl vyzkoušen rovněž alternativní algoritmus určující střed plazmatu z rekonstruovaných snímků. Tímto algoritmem byl opět výpočet těžiště, tentokrát však byly ořezány hodnoty překračující zvolený práh. Za práh byl empiricky zvolen dvojnásobek hodnoty aritmetického průměru všech pixelů. Jak dokládá obrázek 5.4, podařilo se tímto způsobem téměř eliminovat systematickou odchylku mezi rozdílnými tomografickými algoritmy. Lze soudit, že rozdíl byl způsoben odlišnou strukturou rekonstruovaného hlavního píku nebo přítomností vysokých artefaktů, zatímco poloha píku je pro obě metody podobná. V případě tomografie měkkého rentgenového záření lze navíc očekávat lépe lokalizovaný pík.

Odchylka tomografického měření od údaje z magnetických senzorů se ořezáním vysokých hodnot také zmenšila, ovšem není jisté, zda k tomu nedošlo náhodou.



Obr. 5.3: Ztráta konvergence iterace na proměnných datech při použití metody sečen;
V čase přibližně 1,03 s došlo k samovolnému obnovení konvergence;
COMPASS, výboj 2648



Obr. 5.4: Rekonstrukce shodná s obrázkem 5.2, před výpočtem těžišť ořezány
vysoké hodnoty; Odchylka mezi oběma tomografickými metodami
se tím po většinu času zmenšila

5.3 Kritéria konvergence

V předchozí kapitole (odstavec 4.2) byla navržena dvě kritéria pro rozpoznání ztráty konvergence iterace na proměnných datech minimalizující Fisherovu informaci:

$$\chi^2(\mathbf{g}_k) = 1, \quad (5.1)$$

$$\Delta g := \frac{\|\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}\|}{\|\mathbf{g}_k\|} = 0, \quad (5.2)$$

kde $\mathbf{g}_k$ je aktuálně rekonstruovaný snímek a $\mathbf{g}_{k-1}$ značí snímek použitý v lineárním přiblížení Fisherova funkcionálu, kterým je předchozí rekonstruovaný snímek nebo klouzavý průměr více předchozích snímků.

V rámci testování algoritmů na reálných datech byla tato kritéria ověřena na rekonstrukci výbojů 2648 (215 snímků) a 2705 (210 snímků); Pro lepší přehlednost bylo v obou případech vynecháno prvních 40 ms výboje. Jako referenční kritérium byla používána vzdálenost středu rekonstrukce metodou iterace na proměnných datech od středu rekonstrukce tradiční metodou se dvěma vnořenými cykly. Tyto středy byly určovány jako těžiště shora oříznutého profilu, aby se pokud možno omezily systematické chyby.

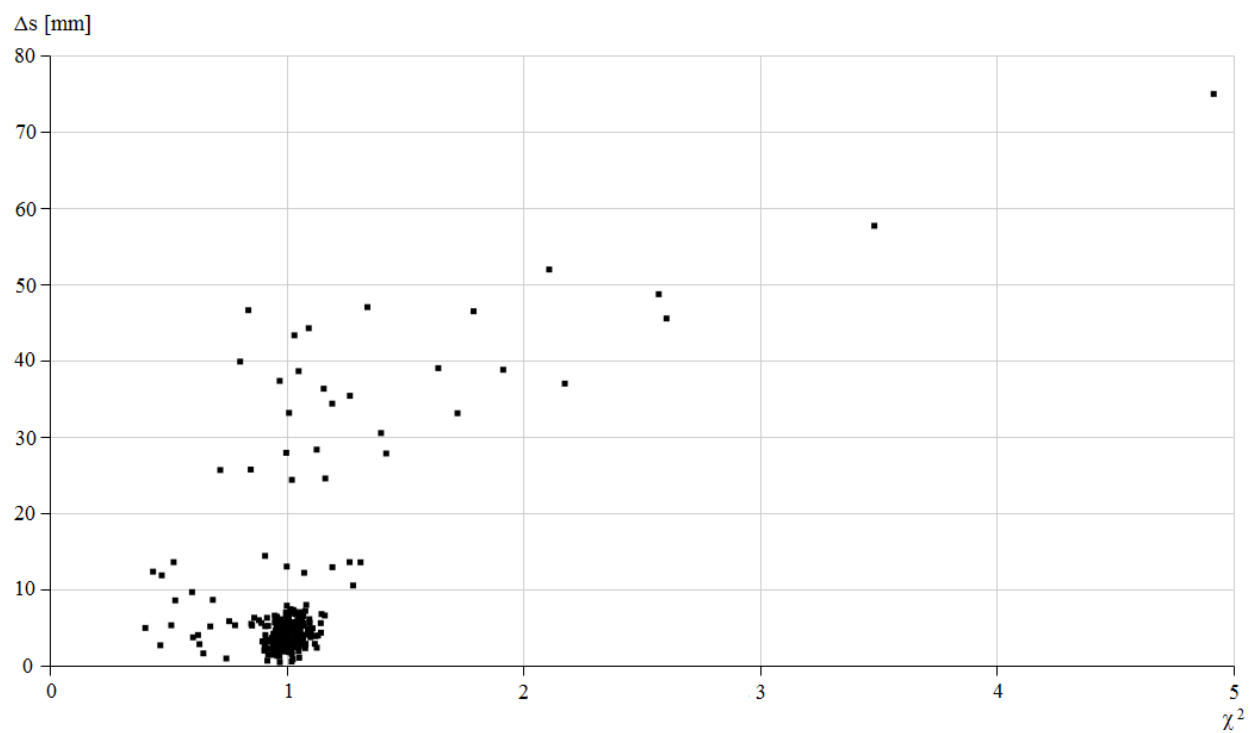
Obrázky 5.5 a 5.6 znázorňují získanou závislost odchylky rekonstruovaného středu snímku na veličinách χ^2 , respektive Δg . Většina snímků vykazuje odchylku středu menší než 1 cm, ale v obou grafech je také patrná řídká skupina snímků lišících se o více než 2 cm. Snímky z této skupiny je třeba rozpoznat na základě příslušných hodnot χ^2 a Δg .

Řada snímků s velkou odchylkou středu vykazuje relativně vysokou hodnotu χ^2 . Kvantitativní podmínku lze nastavit zhruba na $\chi^2 < 1,2$, čímž vyloučíme přibližně polovinu poškozených snímků. Nižší práh už by zřejmě měl za následek vyřazení značného množství správných snímků bez zásadního vlivu na snímky chybné.

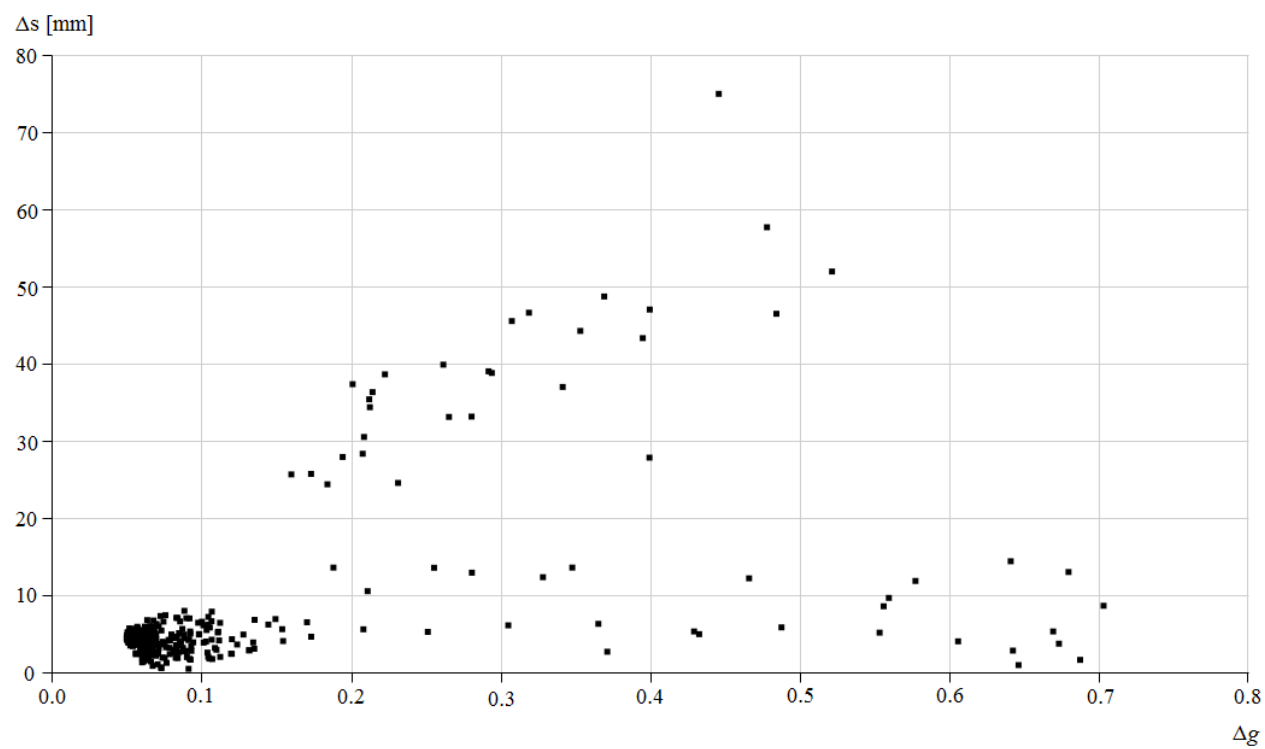
Kritérium Δg trpí opačným problémem. Všechny zaznamenané snímky s odchylkou středu přesahující 1 cm mají hodnotu $\Delta g > 0,15$. Totéž však platí o řadě snímků s nižší chybou. Aplikováním tohoto prahu vyloučíme 29 snímků s chybou vyšší než 2 cm, 10 s chybou od 1 cm do 2 cm a 18 snímků s nižší chybou, tedy celkem přibližně 13,5 % všech snímků.

Obrázek 5.7 ukazuje rozložení vadných snímků v prostoru $\chi^2 \times \Delta g$, v němž tyto snímky patrně neformují jasně ohraničenou skupinu. Není ovšem jisté, zda snímky s nízkou odchylkou středu vyloučené kritériem Δg jsou skutečně rekonstruované bezchybně, nebo zda dosáhly dobré přesnosti pouze náhodou.

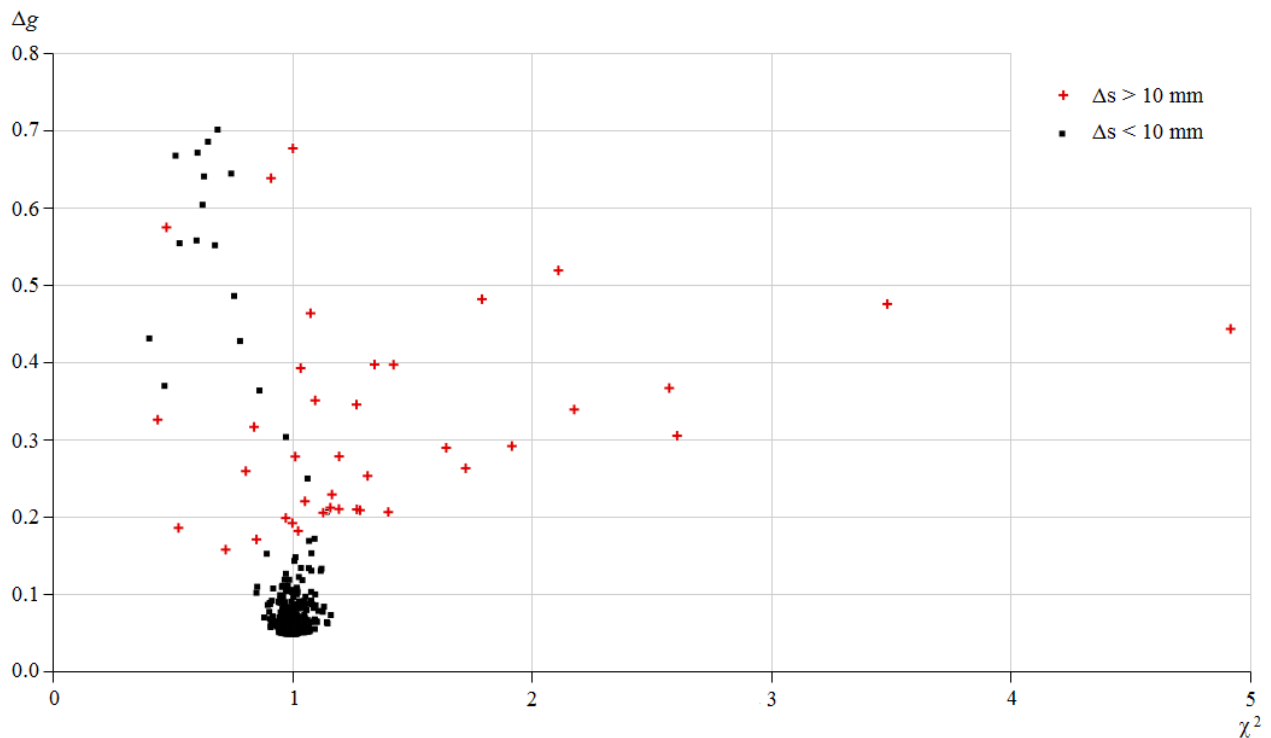
Je vhodné zmínit, že kritérium χ^2 najde své uplatnění v případě dlouhodobé ztráty konvergence, jaká nastala při rekonstrukci znázorněné na (5.3). Ukazuje se totiž, že v takovém případě nabývá χ^2 hodnot nižších než 0,5. Tyto ztráty konvergence však byly pozorovány jen v případě metody sečen, při použití metody třetiv žádného podobného stavu dosaženo nebylo. Navíc kritérium umožňuje ztrátu konvergence pouze rozpoznat, není totiž zřejmé, jak uměle vrátit iteraci do normálního stavu.



Obr. 5.5: Závislost odchylky středu Δs na hodnotě χ^2



Obr. 5.6: Závislost odchylky středu Δs na hodnotě Δg



Obr. 5.7: Hodnoty χ^2 a Δg rekonstruovaných snímků;
Vyznačeny jsou snímky s odchylkou středu Δs přesahující 1 cm

5.4 Výpočetní čas algoritmu

Původní tomografický algoritmus rekonstruující jednotlivé snímky s využitím dvou vnořených iteračních cyklů dosahoval na použitém hardwaru průměrného času 0,314 s na rekonstrukci jednoho snímku. Nově implementovaný algoritmus s iterací na proměnných datech dosahuje času 0,0131 s.

Měření bylo provedeno na 250 snímcích z výboje 2648 v rozlišení 20×34 px. V tomto případě tedy bylo dosaženo více než dvacetinásobného urychlení výpočtu.

Nový algoritmus nevyžaduje žádné inicializační výpočty, využívá předem definované počáteční přiblížení rekonstrukce.

Závěr

V první části této práce byly stručně popsány základní principy tomografie plazmatu a fungování několika známých algoritmů. O něco detailněji byla přiblížena motivace a fungování algoritmu Tichonovovy regularizace s minimalizací Fisherovy informace, který je v současnosti používán na tokamaku COMPASS.

Ve zbývajících částech práce bylo rozebráno několik možných úprav používaného algoritmu. Účelem všech těchto úprav je rychlostní optimalizace s cílem umožnit rekonstrukci v reálném čase během výboje a pomoci tak zařadit tento algoritmus mezi prostředky aktivní zpětné vazby tokamaku.

Pro účely dalšího vývoje byl původní algoritmus se dvěma vnořenými iteračními cykly numericky řešícími podmínky na veličinu χ^2 a Fisherovu informaci upraven do podoby jediného iteračního cyklu optimalizujícího obě veličiny zároveň. Sjednocený algoritmus produkuje hladší výstupy, tedy lépe aproximující minimum Fisherovy informace, za cenu vyšší citlivosti na volbu počátečního přiblížení rekonstrukce. Rychlost tohoto algoritmu je srovnatelná s algoritmem původním.

Dále byl implementován algoritmus s iteračním cyklem probíhajícím kontinuálně během celého výboje a zpracovávajícím proměnná data. Tento algoritmus je založen na výše zmíněné sjednocené iteraci pro Fisherovu informaci a χ^2 . Výpočet mezi vstupem dat a jim odpovídajícím výstupem byl zkrácen na jeden průběh iteračního cyklu, čímž bylo dosaženo přibližně dvacetinásobného urychlení.

Funkčnost posledního algoritmu byla ověřena na modelových datech a rovněž na datech reálných, získaných z tokamaku COMPASS. V případě reálných dat byla správnost rekonstrukce nově implementovanou metodou posuzována srovnáním s výsledky metody původní.

Při použití metody sečen pro optimalizaci veličiny χ^2 byly v některých případech pozorovány ztráty konvergence trvající až desítky milisekund. Bylo navrženo kritérium pro jejich rozpoznání. Ukazuje se ovšem, že použitím formálně pomalejší metody třetiv lze těmto nestabilitám předejít.

Přibližně 10 % snímků rekonstruovaných iterací na proměnných datech vykazuje odchylku středu profilu od středu snímků rekonstruovaných tradiční metodou vyšší než 1 cm. Bylo navrženo kritérium umožňující jejich rychlou identifikaci a vyloučení z procesu řízení tokamaku. Nabízí se rovněž možnost pokusit se o opravu těchto snímků, například přidáním jednoho nebo více iteračních cyklů na konstantních datech. Tento postup by vedl ke zvýšení potřebného výpočetního času a zpomalení zpětné vazby. Může se však ukázat být užitečným například v případě, že iterace na proměnných datech najde uplatnění v rychlém povýbojovém zpracování dat.

Výsledná rychlost výpočtu závisí kromě vlastností algoritmu také na použitém hardwaru. V případě potřeby lze uvažovat o dalším významnějším urychlení použitím iteračních metod řešení soustav lineárních rovnic a omezením požadované přesnosti, což lze chápat jako zjemnění celkového iteračního cyklu. Následkem by patrně byl ještě vyšší podíl poškozených snímků.

Pokud se naopak ukáže, že rychlost algoritmu je dostatečná, lze zvýšit přesnost rekonstruovaných snímků omezením počtu iteračních kroků mezi vstupem a výstupem například na dva namísto jednoho.

Otázkou zůstává, jak sjednotit tomografickou zpětnou vazbu s dosud používanou magnetickou. Hlavním problémem v tomto směru je fakt, že coby polohu plazmatu poskytuje tomografie mírně odlišnou veličinu než magnetické měření. Na rozdíl od současných magnetických senzorů je však výstup tomografie absolutní, nepředstavuje integrální hodnotu s nahromaděnými chybami jednotlivých měření.

Seznam použitých zdrojů

- [1] Libra, M. Mlynář, J. Poulek, V. *Jaderná energie*. ILSA, Praha, 2012.
ISBN 978-80-904311-6-4
- [2] Beňo, R. *Řízení tokamaku COMPASS*. ČVUT, FEL, 2011, diplomová práce.
http://support.dce.felk.cvut.cz/mediawiki/images/4/49/Dp_2011_beno_radek.pdf
[cit. 7. 11. 2011]
- [3] Kudláček, O. *Řízení polohy plazmatu na tokamaku COMPASS*. ČVUT, FJFI, 2010, výzkumný úkol. <http://fttf.fjfi.cvut.cz/StPrace/VyzkUk/2010/KudlacekOndrej.pdf>
[cit. 8. 5. 2011]
- [4] Vácha, M. *Detection systems for measurements of high temperature plasma radiation on the COMPASS tokamak by fast bolometers and soft X-ray detectors*. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2009, diplomová práce
- [5] Ingesson L. C. et al. *Tomography Diagnostics: Bolometry and Soft X-Ray Detection*. Fusion Science and Technology 53 (2008), 528 s.
- [6] Dufková, E. *Bolometrická měření celkového vyzářeného výkonu vysokoteplotního plazmatu tokamaku CASTOR*. ČVUT, FJFI, 2008, bakalářská práce.
<http://golem.fjfi.cvut.cz/files/students/BcTh/Dufkova.pdf> [cit. 7. 11. 2011]
- [7] Odstrčil, M. *Tomografie plazmatu na tokamaku COMPASS*. ČVUT, FJFI, 2010, bakalářská práce. [cit. 9. 10. 2011]
http://files.michalodstrcil.webnode.cz/200000044-2078821726/bak_prace.pdf
- [8] Howard, J. *Tomography and Reliable Information*. Journal of the Optical Society of America A, Vol. 5, No. 7 (1988), 999 s. [http://people.physics.anu.edu.au/~jnh112/AIIM/My publications/Howard_reliable_info.pdf](http://people.physics.anu.edu.au/~jnh112/AIIM/My%20publications/Howard_reliable_info.pdf) [cit. 8. 6. 2012]
- [9] Golub, G. H., Matt, U. *Tikhonov Regularization for Large Scale Problems*.
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.51.409&rep=rep1&type=pdf>
[cit. 1. 4. 2012]
- [10] Nguyen, N. C. *A Note on Tikhonov Regularization of Linear Ill-Posed Problems*.
http://www.mit.edu/~cuongng/Site/Publication_files/Tikhonov06.pdf [cit. 1. 4. 2012]
- [11] Hansen, P. C. *The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*.
<http://www.sintef.no/project/eVITAmeeing/2005/Lcurve.pdf> [cit. 8. 4. 2012]
- [12] Johnston, P. R., Gulrajani, R. M. *Selecting the Corner in the L-Curve Approach to Tikhonov Regularization*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering 47 (2000), 1293 s.
- [13] Weisstein, E. W. *Secant Method*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/SecantMethod.html> [cit. 3. 6. 2012]

- [14] Mlynář, J. et al. *Inversion Techniques in the Soft X-Ray Tomography of Fusion Plasmas: Toward Real-time Applications*. Fusion Science and Technology 58 (2010), 733 s.
- [15] Anton, M. et al. *X-ray tomography on the TCV tokamak*. Plasma Physics and Controlled Fusion 38 (1996), 1849 s.
- [16] Mlynář, J. Duval, B. P. Horáček, J. Lister, J. B. *Present and perspective roles of Soft X-Ray Tomography in Tokamak Plasma Position Measurements*. Fusion Engineering and Design 66-68 (2003), 905 s.
- [17] Mlynář, J. et al. *Investigation of the consistency of magnetic and soft X-ray plasma position measurements on TCV by means of a rapid tomographic inversion algorithm*. http://infoscience.epfl.ch/record/121278/files/lrp_732_02_hq.pdf [cit. 10. 6. 2012]

Přílohy

Příloha A

Obsah CD

CD obsahuje elektronickou verzi této práce, reálná data a algoritmy používané v této práci. Všechny algoritmy byly vytvořeny v prostředí MATLAB.

text.pdf	Elektronická verze této práce
tomography/	Použitý algoritmus a data
COMPASS/	Použitá data z tokamaku COMPASS
2648/	Data z výboje 2648
2705/	Data z výboje 2705
geometry/	Uspořádání detektorů na tokamaku COMPASS
annulus.m	Určuje hranici tokamaku
data_prep.m	Připravuje reálná data
generator_dat.m	Generuje modelová data
geom_mat_gen.m	Připravuje geometrickou matici
geom_mat_setting.m	Inicializuje geometrii
get_mag_field.m	Připravuje geometrii magnetického pole
mat_deriv_B.m	Připravuje matici anizotropní derivace
start_sxr.m	Inicializuje výpočet
sxrtminfisher_gen.m	Provádí tomografickou inverzi
virt_chords.m	Připravuje data pro geometrickou matici