

České vysoké učení technické
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky



Studium transformace chyb v tomografii fúzních neutronů

Bakalářská práce

Autor práce:
Školitel:
Školní rok:

Martin Imříšek
RNDr. Jan Mlynář, PhD.
2007/2008

Rád bych poděkoval vedoucímu své práce RNDr. Janu Mlynáři, Ph.D za vstřícné a trpělivé vedení mé bakalářské práce, za cenné rady a připomínky i za ochotné zodpovězení mých otázek.

Martin Imříšek

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 30.9. 2008

Martin Imříšek

Název práce:

Studium transformace chyb v tomografii fúzních neutronů

Autor: Martin Imříšek

Obor: Fyzikální inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: RNDr. Jan Mlynář, Ph.D., odd. tokamak ÚFP AV ČR, v.v.i.

Abstrakt: Tomografie fúzních neutronů v tokamaku JET podává důležitou informaci o fúzním výkonu v plazmatu. Práce se zabývá chybami v tomografické rekonstrukci emisivity neutronů pomocí Tichonovy regularizace vymezené minimem Fisherovy informace. Stěžejní částí práce je modelace gaussovského šumu v detektorech metodou Monte Carlo a následné statistické zpracování jeho vlivu na tomografickou rekonstrukci. Bylo zjištěno, že gaussovský šum v detektorech vede rovněž ke gaussovskému rozdělení hodnot jednotlivých pixelů a variační koeficient je nejmenší uprostřed plazmatu. Dále práce nabízí porovnání modelové funkce a její tomografické rekonstrukce, odhad chyby rekonstrukce vzniklé vychýlením detektoru a srovnání tomografických rekonstrukcí se zanedbáním a s přihlédnutím k rozbihavosti zorných polí detektorů. Práce také obsahuje popis tokamaku a stručný úvod do problematiky tomografie a metody Monte Carlo.

Klíčová slova: tokamak, tomografie, fúzní neutrony, Tichonova regularizace, Fisherova informace, metoda Monte Carlo

Title:

Studies of error transmission in tomography of fusion neutrons

Author: Martin Imříšek

Abstract: The tomography of fusion neutrons in JET tokamak provides important information about fusion power in plasma. The thesis deals with errors in tomographic reconstruction of neutron emissivity by means of Tikhonov regularisation constrained by minimum Fisher information. The main part of the thesis is the modelation of Gaussian noise in detectors by the Monte Carlo method followed by statistical analysis of its influence on tomographic reconstruction. It was found out that Gaussian noise in detectors leads to Gaussian distribution of pixels values and variation coefficient is the smallest in the middle of plasma. Further, the thesis offers a comparison between model function and its tomographic reconstruction, estimation of reconstruction error caused by deflection of the selected detector and comparison between tomographic reconstruction with neglect and with regard to real width of detectors' visual field. The thesis also contains a description of tokamak and a brief introduction to the problems of tomography and the Monte Carlo method.

key words: tokamak, tomography, fusion neutrons, Tikhonov regularisation, Fisher information, Monte Carlo method

Obsah

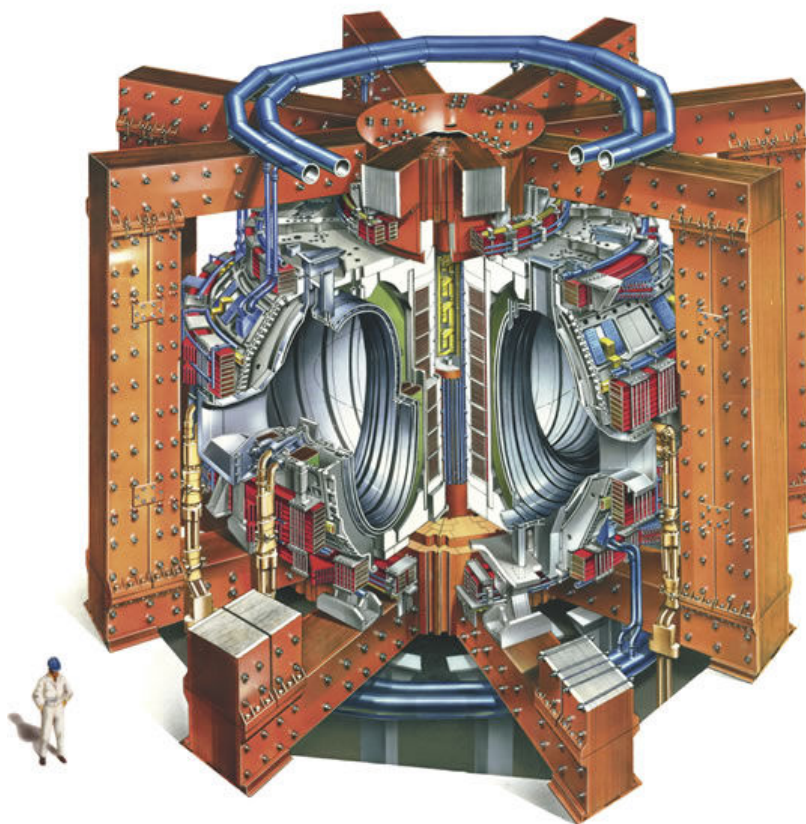
1. Tokamak	6
1.1. Úvod	6
1.2. Magnetické udržení plazmatu v tokamaku	7
1.2.1. Základy	7
1.2.2. Drifty nabitých částic v toroidálním magnetickém poli	8
1.2.3. Magnetické pole v tokamaku	9
1.2.4. Divertor	10
1.2.5. Transportní bariery	11
1.2.6. Základní parametry magnetického udržení plazmatu v tokamaku	11
1.3. Zahřívání plazmatu	12
1.4. Stručný popis činnosti tokamaku	13
1.5. Nestability	14
1.6. Fúzní reakce v tokamaku	16
1.7. Diagnostiky plazmatu v tokamaku	18
1.8. Parametry vybraných tokamaků	21
 2. Tomografie	22
2.1. Tomografie obecně	22
2.2. Tomografie fúzních neutronů v tokamaku JET	23
2.2.1. Měření pro tomografickou rekonstrukci emisivity neutronů	23
2.2.2. Tomografická rekonstrukce profilu emisivity neutronů	24
2.2.3. Tichonova regularizace omezená minimem Fisherovy informace	25
2.2.4. Výpočetní algoritmus	27
2.2.5. Užitá mřížka pixelů	28
2.3. Chyby tomografické rekonstrukce pomocí MFR	29
2.3.1. Modelová funkce	29
2.3.2. Vylepšená transformační matice	32
2.3.3. Vychýlení detektoru	35
 3. Metoda Monte Carlo	39
3.1. Úvod	39
3.2. Generátor pseudonáhodných čísel	39
3.3. Simulace šumu v detektorech neutronů pro tomografickou rekonstrukci	40
emisivity neutronů metodou MFR na tokamaku JET	
3.3.1. Relativní posun střední hodnoty pixelu od původní hodnoty	45
3.3.2. Výběrová směrodatná odchylka	45
3.3.3. Variační koeficient	46
3.3.4. Pravděpodobnostní rozdělení hodnot jednotlivých pixelů	48
 4. Diskuse	51
 5. Závěr	51
 Literatura	53
 Dodatek - základní programy v Matlabu	54

1. Tokamak

1.1. Úvod

Termojaderná fúze neboli syntéza atomových jader za vysokých teplot je zdrojem energie hvězd a mohla by být také čistým, bezpečným a téměř nevyčerpatelným zdrojem energie pro lidstvo. Vzhledem k tenčícím se zásobám dosavadních energetických zdrojů na Zemi je zvládnutí termojaderné fúze zřejmě nezbytnou podmínkou pro pokrytí budoucích energetických potřeb lidstva. K jejímu dosažení je ovšem zapotřebí ohromných teplot (desítky až stovky miliónů stupňů). To proto, aby měla kladně nabitá atomová jádra dostatek energie k překonání odpudivé elektrické síly a mohla se tak přiblížit dost blízko na to, aby převládla silná jaderná síla, která drží nukleony v jádře pohromadě. Látku o takové teplotě není ale možné žádným materiálem udržet a je také potřeba ji izolovat od okolí, aby neztrácela teplo. Jedním z řešení je držet palivo magnetickým polem. To je možné díky tomu, že při tak vysokých teplotách se atomy ionizují a vzniká tak plazma. V současné době je zřejmě nejvyvinutějším zařízením, ve kterém je plazma drženo magnetickým polem, právě tokamak.

Název tokamak pochází z ruských slov "**тороидальная камера в магнитных катушках**" (**toroidal'naya kamera v magnitnykh katushkakh**), které znamenají "toroidální komora v magnetických cívkách". Byl navržen v padesátých letech sovětskými fyziky I. Tammem a A. Sacharovem a vyvinut pod vedením L. Arcimoviče.



Obrázek 1.1: Pohled do anglického tokamaku JET

1.2. Magnetické udržení plazmatu v tokamaku

1.2.1. Základy

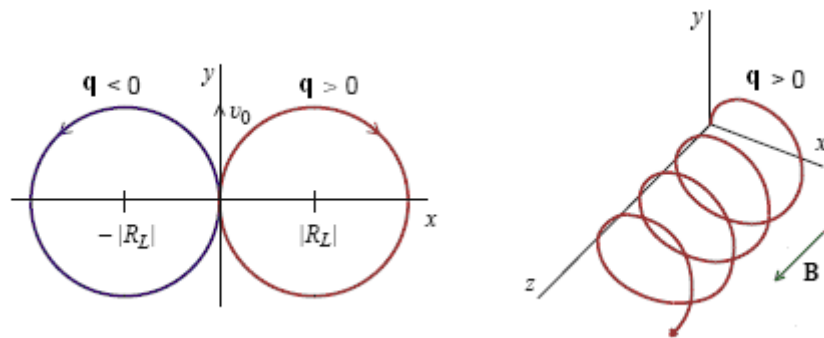
Plazma obsahuje nabité částice a je proto ovlivňováno magnetickým polem: na částici s nábojem q pohybující se rychlostí $\vec{v}$ v magnetickém poli s indukcí $\vec{B}$ působí Lorentzova síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Uvažujeme-li pro jednoduchost homogenní magnetické pole, můžeme vhodným zvolením souřadnic získat pole $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ a počáteční podmínky:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_{y0}, \dot{z}(0) = v_{z0}.$$

Dostaneme tak pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q\dot{y}B_z & x &= R_L - R_L \cos(\omega t) \\ m\ddot{y} &= -q\dot{x}B_z & y &= R_L \sin(\omega t) \\ m\ddot{z} &= 0 & z &= v_{z0}t \end{aligned} \quad \text{jejichž řešením získáme:} \quad \text{kde } R_L = \frac{mv_{y0}}{qB_z}, \quad \omega = \frac{qB_z}{m}$$

Nabitá částice se tedy pohybuje po šroubovici podél siločar magnetického pole (viz obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli. Převzato z [6]

Poloměr oběhu R_L se nazývá Larmorův poloměr a můžeme jej dostat také srovnáním odstředivé síly ($mv_{\perp}^2 / R_L$) a síly magnetického pole ($qv_{\perp}B$):

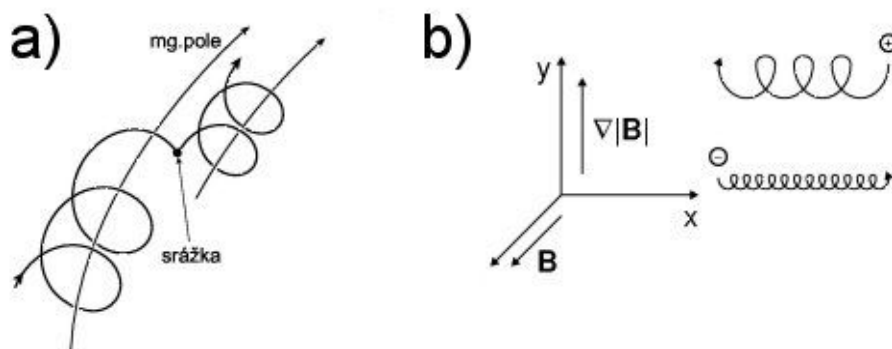
$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

kde $v_{\perp}$ je rychlost kolmá na magnetické pole B . Frekvence oběhu ω se nazývá cyklotronová frekvence a lze ji snadno dostat také z Larmorova poloměru neboť $\omega R_L = v_{\perp}$ a pro cyklotronovou frekvenci tedy platí:

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

1.2.2. Drifty nabitých částic v toroidálním magnetickém poli

Nabízí se tedy možnost úplně uzavřít pohyb nabitých částic v plazmatu v kruhovém magnetickém poli - vytvořením silného toroidálního (prstencového) magnetického pole. Taková částice by pak měla obíhat po šroubovici stočené do kruhu. Jenomže plazma má podobně jako plyn tendenci se rozpínat a částice vlivem srážek a také driftů unikají pryč (viz obr. 1.3).

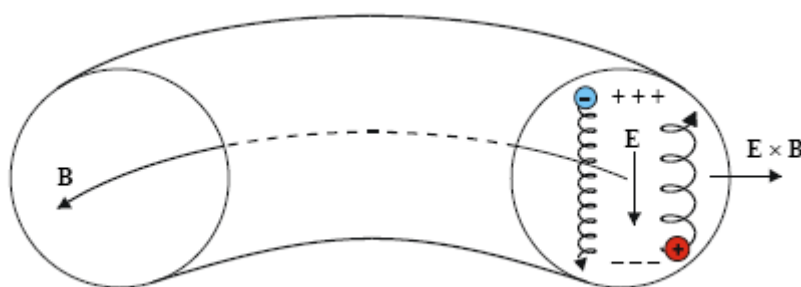


Obrázek 1.3: Pohyb nabitých částic napříč magnetickým polem a) srážkami, b) drifty (zde drift v gradientu magnetického pole). Převzato z [5].

Drift je pohyb nabité částice v kolmém směru na magnetické pole způsobený přítomností nějaké další síly kolmé na magnetické pole. Rychlost driftu je dána vztahem

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}. \quad (1.1)$$

Necháme-li tedy částice obíhat po takto zakřivené dráze, bude na ně působit odstředivá síla, která se bude podílet na driftu nabitých částic (jedná se o tzv. drift zakřivení). Směr rychlosti závisí na znaménku náboje a proto dojde k separaci nábojů a tím ke vzniku elektrického pole $\vec{E}$. Ve vztahu (1.1) se tak objeví síla $\vec{F} = q\vec{E}$, která vyvolá tzv. $E \times B$ drift (viz obr. 1.4).

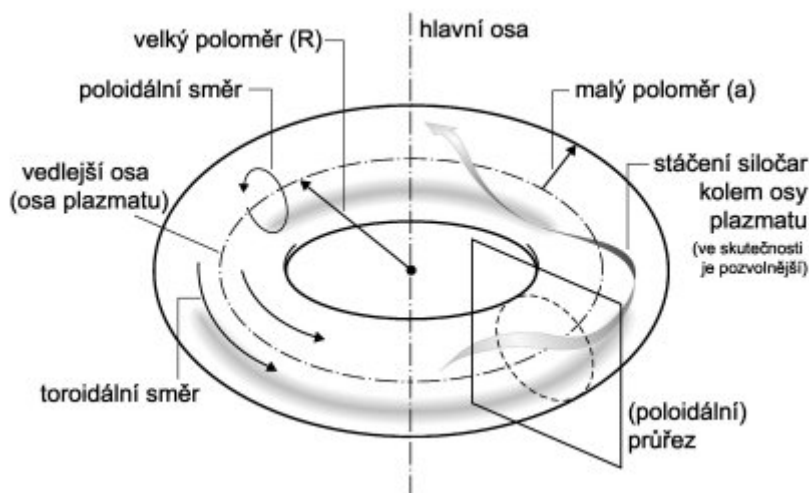


Obrázek 1.4: Separace náboje v důsledku driftu zakřivení a následný vznik elektrického pole tím i $E \times B$ driftu. Převzato z [6].

Toroidální magnetické pole je navíc nerovnoměrné. Vytvoříme-li totiž takové pole například stočenou cívkou, bude magnetické pole silnější směrem ke středu křivosti jak plyne z Ampérova zákona¹. Gradient magnetického pole pak vyvolá sílu ve směru klesajícího magnetického pole: $\vec{F} = -\mu \vec{\nabla} |\vec{B}|$,

kde $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ je magnetický moment proudové smyčky vytvořené Larmorovou rotací nabitě částice. Výsledkem je znovu drift nabitých částic (lze ukázat, že se sčítá s driftem zakřivení) a separace náboje.

Přidáme-li ale další magnetické pole se siločarami v poloidálním směru (tj. kolem siločar toroidálního pole - viz obr. 1.4), získají nabitě částice další rotaci (v poloidálním směru), která tyto driftы potlačí. Výsledné magnetické pole si pak lze představit jako šroubovici stočenou do kruhu. Z hlediska stability plazmatu se ukazuje, že poloidální stáčení by mělo být pomalejší než toroidální.

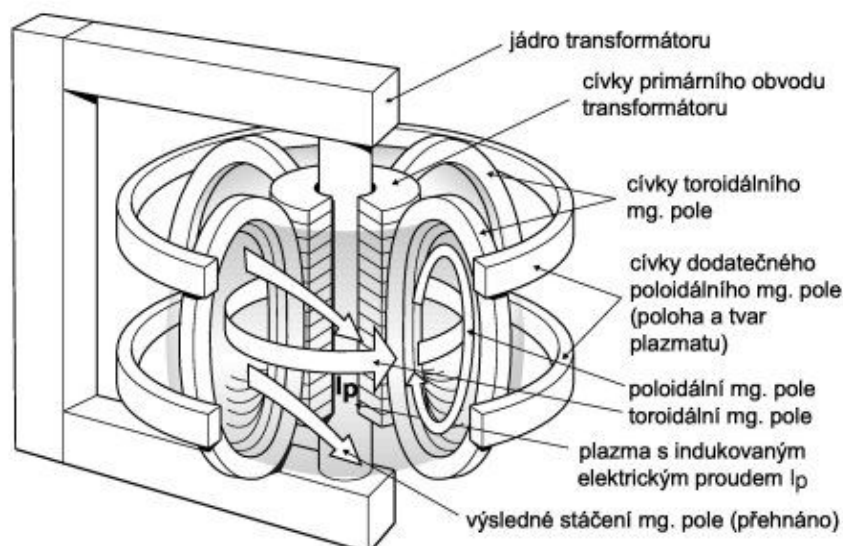


Obrázek 1.5: Základní pojmy toroidální geometrie. Převzato z [5].

1.2.3. Magnetické pole v tokamaku

V tokamaku je horké plazma drženo ve vakuové nádobě tvaru toru (pneumatiky) právě takovýmto magnetickým polem tvořeným jak toroidální tak poloidální složkou. Silné toroidální magnetické pole (jednotky Tesla) je vytvářeno cívkami umístěnými po obvodu toru (viz obr. 1.6). Slabší poloidální složku magnetického pole vytváří elektrický proud v plazmatu jdoucí toroidálním směrem (tím se tokamak liší například od stellarátoru, ve kterém je celkové magnetické pole vytvářeno jen vnějšími cívkami). Proud je v plazmatu indukován transformátorovým jevem prostřednictvím primárního vinutí, které je umístěno zpravidla na hlavní ose tokamaku, zatímco plazma představuje jediný závit sekundárního vinutí. Další pomocné poloidální pole je vytvářeno vnějšími cívkami a slouží k řízení polohy a tvaru plazmatu.

¹ Z Ampérova zákona plyne: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I N$, kde l je křivka, po které se integruje tečná složka magnetického pole $\vec{B}$, μ_0 je permeabilita vakua, I proud cívkou a N počet závitů.

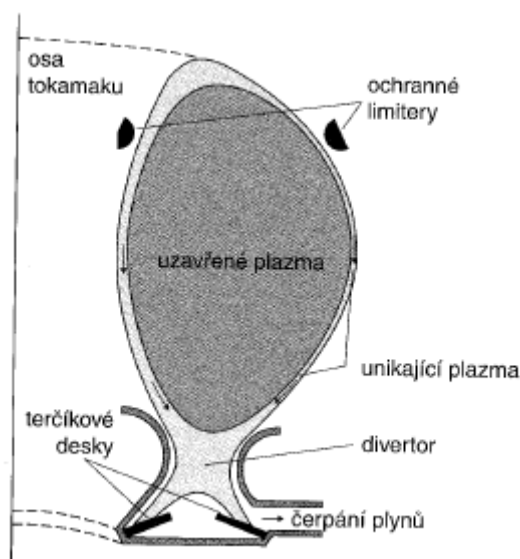


Obrázek 1.6: Horké plazma je drženo v nádobě ve tvaru toru (pneumatiky) pomocí silného toroidálního magnetického pole doprovázeného navíc poloidální složkou vyvolanou elektrickým proudem v samotném plazmatu. Převzato z [5].

Poloidální průřez magnetického povrchu může být nejen kruhový ale také obdélníkový nebo ve tvaru písmene D, který je nejvýhodnější díky rozložení sil působících na cívky toroidálního pole. Zároveň se v experimentu ukázalo, že je optimální i z hlediska udržení plazmatu.

1.2.4. Divertor

Magnetické udržení není dokonalé a nabitě částice difúzí a vlivem magnetických poruch unikají a následně narážejí do stěn nádoby. Tím dochází k poškození nádoby a uvolňování nečistot do plazmatu. Nečistoty pak plazma ochlazuje. Proto se do tokamaku zavádí divertor (viz obr. 1.7). Pomocnými cívkami je poloidální magnetické pole na okraji plazmatu vyvedeno do divertoru, kde nabitě částice unikající z plazmatu narážejí do terčíkových desek a jsou odčerpávány pryč. Odčerpané částice paliva pak lze separovat od částic nečistot (tedy od všeho, co neslouží jako palivo v tokamaku - tj. vše kromě deuteria a tritia) a znovu je vrátit do plazmatu. Divertor tak bude moci v budoucích fúzních reaktorech sloužit i k odvodu spalín (tj. helia) z tokamaku. Nevýhodou divertoru ovšem je, že značně komplikuje schéma tokamaku a zmenšuje objem plazmatu.



Obrázek 1.7: Schématický průřez vakuové nádoby v tokamaku s divertorem. Převzato z [1].

1.2.5. Transportní bariery

Za určitých podmínek lze dosáhnout tzv. H-módu, kdy se na okraji plazmatu vytvoří transportní bariéra, která způsobí nárůst teploty a hustoty na okraji plazmatu. Výsledkem je až dvojnásobně lepší udržení tepelné energie plazmatu. Tento režim byl objeven při experimentech s divertorem na německém tokamaku ASDEX a dodnes platí, že jeho dosažení je podstatně jednodušší v uspořádání s divertorem. Nahromaděná energie se pak rázově uvolňuje ve výtryscích částic a záření (tzv. ELMy - Edge Localised Modes).

Další transportní bariéru lze vytvořit uvnitř plazmatu vytlačněním maxima proudu z centrální oblasti. Tím se zlepší udržení plazmatu ale zároveň je ke vzniku a udržení vnitřní transportní bariéry potřeba velký dodatečný ohřev plazmatu. Proto se studuje také tzv. hybridní mód s pouze zploštělým profilem proudu.

1.2.6. Základní parametry magnetického udržení plazmatu v tokamaku

Bezpečnostní faktor q

Strmost stáčení (helicitu) magnetického pole určuje tzv. bezpečnostní faktor (jde o spíše historický název). Hodnota bezpečnostního faktoru udává počet oběhů magnetické siločáry v toroidálním směru nutný k tomu, aby siločára vykonala jeden oběh poloidální. V případě kruhového průřezu plazmatu pak lze pro bezpečnostní faktor q odvodit vztah:

$$q = \frac{B_r}{B_p} \frac{r}{R},$$

kde r je malý poloměr a R velký poloměr toru. Obecně je potom bezpečnostní faktor definovaný vztahem:

$$q = \frac{d\Phi}{d\Psi},$$

kde $\Phi = \int \vec{B}_T \cdot d\vec{S}$ je tok toroidálního magnetického pole a $\Psi = \int \vec{B}_p \cdot d\vec{S}$ tok poloidálního magnetického pole. Z hlediska dobrého udržení plazmatu je ideální, pokud siločára vytváří

dvourozměrný magnetický povrch (tj. netvoří uzavřenou křivku). Tím se zamezí tvorbě izolovaných oblastí, které jsou původcem nestabilit a symetričtěji rozložené plazma lze pak lépe udržet. Aby siločára magnetického pole vytvořila dvourozměrný povrch, je tedy potřeba aby bezpečnostní faktor q byl iracionální číslo.

Profil proudu ale klesá směrem k okraji plazmatu, kde je plazma nejchladnější a tedy i méně vodivé. Tím se mění i poloidální magnetické pole vyvolané proudem v plazmatu a proto existují siločáry s racionálním q .

Bezpečnostní faktor je důležitým ukazatelem stability plazmatu. Zjistilo se totiž, že plazma v tokamaku obvykle přestává být stabilní pro $q < 3$ na okraji plazmatu. Tedy v případě, kdy se magnetické pole na kraji plazmatu začne stáčet příliš strmě.

Parametr β

Dalším důležitým parametrem, který popisuje magnetické udržení plazmatu v tokamaku je parametr β . Udává procentuální poměr tlaku plazmatu k tlaku magnetického pole.

Tlak řídkého plazmatu v tokamacích je dostatečně přesně popsán rovnicí ideálního plynu: $p = n_e k T_e + n_i k T_i$, kde n_e , T_e je hustota a teplota elektronů a n_i , T_i hustota a teplota iontů.

Tlak magnetického pole je ve vakuu roven hustotě energie magnetického pole:

$$p_B = \frac{B^2}{2\mu_0}, \text{ kde } \mu_0 \text{ je permeabilita vakua. Pro } \beta \text{ tedy platí } \beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} 100 \text{ [\%]}. \text{ Za tlak}$$

plazmatu p se volí buď střední nebo maximální hodnota v tokamaku. Z hlediska stability magnetického udržení plazmatu v tokamaku je potřeba, aby β nepřesáhlo několik procent, viz kapitola 1.5

1.3. Zahřívání plazmatu

Mnohamiliónových teplot potřebných k nastartování termojaderné fúze je v tokamaku dosahováno několika způsoby:

Ohmický ohřev

Proud tekoucí plazmatem má kromě vytváření poloidální složky magnetického pole ještě další funkci: zahřívá plazma ohmickým ohřevem (výkon ohřevu $P = RI^2$, kde R je odpor plazmatu a I proud plazmatem). S rostoucí teplotou ale odpor plazmatu klesá a tak je ohmický ohřev účinný "jen" do několika málo desítek milionů stupňů. Vyšší teploty by vyžadovaly mnohem vyšší proud, a tedy příliš silné poloidální pole v poměru k technicky proveditelnému toroidálnímu poli. K dosažení dostatečné četnosti fúzních reakcí je ale zapotřebí teploty okolo sta milionů stupňů.

Ohřev neutrálními svazky

Další možností jak plazma zahřát je vstřelením částic urychlených na velké rychlosti. Vlivem srážek je pak jejich kinetická energie předávána částicím v plazmatu a tím se plazma

zahřívá. Nabité částice (nejčastěji deuterony) lze snadno urychlit elektrickým polem vytvořeným řadou vysokonapěťových mřížek. Ionty však nelze do tokamaku vstřelit přímo, protože by je jeho silné magnetické pole odklonilo. Proto jsou neutralizovány průletem deuteriovým plynem. Po jejich vstřelení do plazmatu jsou částice srážkami znovu ionizovány a zachyceny magnetickým polem. Energie neboli rychlost částic vstřelovaných do plazmatu nesmí být přitom příliš velká, aby plazmatem neproletěly na druhou stěnu nádoby.

Svazky neutrálních částic lze využít také v diagnostice plazmatu, kdy sledujeme buď záření nečistot plazmatu díky nábojové výměně se svazkem, nebo záření samotného svazku v důsledku srážkové excitace.

Ohřev elektromagnetickými vlnami

Ohřev elektromagnetickými vlnami využívá rotačního pohybu nabitých částic kolem magnetického pole. Elektromagnetické vlny odpovídající elektronové nebo iontové cyklotronové frekvenci ($\omega = qB/m$) pak v rezonanci předávají iontům nebo elektronům svou energii. (podobně jako v mikrovlnce, kde molekuly vody díky svému dipólovému momentu rezonují s frekvencí 2,45GHz). Elektronová cyklotronová rezonance (ECRH) se provádí vlnami o frekvenci 28GHz/T a iontová (ICRH) 15,2 Z/A MHz/T (kde T jsou jednotky Tesla, Z je počet protonů a A počet nukleonů urychlovaných iontů). Využívají se také vyšší harmonické frekvence (tj. celočíselné násobky těchto frekvencí - zejména druhý a třetí). Výhodou této metody je, že díky závislosti cyklotronové frekvence na magnetickém poli je možné zahřívát plazma v tokamaku na různých místech s různou magnetickou intenzitou (toroidální magnetické pole v tokamaku klesá nepřímo úměrně se vzdáleností od hlavní osy).

Používá se také tzv. dolní hybridní rezonance (LHR), která má frekvenci mezi iontovou a elektronovou cyklotronovou frekvencí (1-8GHz). Spíše než k ohřevu plazmatu se ale používá k vlečení elektrického proudu.

Ohřev fúzními reakcemi

Nabité produkty fúzních reakcí (především částice α) jsou zachyceny magnetickým polem v plazmatu a srážkami pak předávají energii z fúzní reakce ostatním částicím ve formě kinetické energie a tím plazma zahřívají. Od určité četnosti fúzních reakcí plazma nepotřebuje vnější ohřev a dojde k "zapálení". Předpokládá se ale, že v budoucích tokamacích bude plazma ponecháno závislé na vnějším ohřevu, aby byla zajištěna lepší ovladatelnost výkonu a také proto, aby bylo možné optimalizovat profil proudu a vytvářet tak transportní bariéry, které zlepšují udržení energie plazmatu.

1.4. Stručný popis činnosti tokamaku

Před spuštěním

Kromě kontroly řídicí elektroniky a systémů zdrojů je před spuštěním tokamaku také nutné vytvořit ve vakuové nádobě co nejdokonalejší vakuum a důkladně ji očistit od různých nečistot. Nečistoty (částice, které v tokamaku neslouží jako reaktanty fúzních reakcí) v plazmatu totiž způsobují velké ztráty vyzařováním a také ředí palivo. Vakuová nádoba se proto na mnoho hodin zahřívá na stovky stupňů a bombarduje nízkoteplotním plazmatem, které je ve vakuové nádobě vytvářeno doutnavým výbojem z hélia nebo vodíku. Čistotu

plazmatu lze také zvýšit vhodnou volbou materiálů stěn nebo napařováním vrstvy boru nebo berylia (jen u tokamaku JET) na stěny vakuové nádoby.

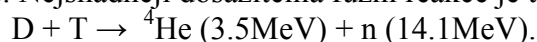
Tokamak jako transformátor

Tokamak si lze představit jako velký transformátor. Nejprve narůstající proud v primárním transformátorovém vinutí (viz obr. 1.6) vyvolá silící magnetický tok jádrem transformátoru (jak plyne z Ampérova zákona). Změna magnetického toku pak (podle Faradayova zákona) indukuje ve vakuové komoře tokamaku napětí v toroidálním směru. Dojde k výboji a plyn (nejčastěji deuterium) ve vakuové komoře se ionizuje¹ a mění v plazma, kterým začíná protékat proud (ve velkém horkém plazmatu až několik milionů ampérů). Ten pomáhá plazma zahřívát a udržovat poloidálním magnetickým polem, které vytváří.

Proud v primárním transformátorovém vinutí ale nemůže růst (resp. klesat) donekonečna a tokamak je proto zatím omezen na impulsní režim. Tento nedostatek bude ale pravděpodobně možné překonat vlečením elektrického proudu mikrovlnami pouštěnými ve směru proudu v plazmatu (tj. nabitě částice budou hnány elektromagnetickými vlnami podobně jako surfař na mořské vlně) a také díky samoindukovanému proudu (Bootstrap current), který je důsledkem difúze plazmatu v toroidálním magnetickém poli.

Výroba energie

Dostatečně zahřáté a husté plazma v tokamaku pak začne produkovat dost fúzních reakcí k získávání energie. Nejsnadněji dosažitelná fúzní reakce je tzv. DT reakce:



Jde tedy o sloučení jader deuteria a tritia za vzniku neutronu a jádra helia. Kladně nabitě jádro helia je zachyceno magnetickým polem tokamaku a předává plazmatu svou energii. Neutron nesoucí 4/5 fúzní energie ale proniká do obalu tokamaku a pomáhá jej tak zahřívát. V budoucích termojaderných elektrárnách pak bude moci obal tokamaku předávat teplo např. vodnímu okruhu parogenerátoru, který vyrobí elektřinu.

Obal tokamaku bude navíc moci využít neutrony k výrobě tritia z lithia a tokamak si tak bude moci sám vyrábět tritium, které se v přírodě téměř nevyskytuje.

Neutrony ale také poškozují konstrukci tokamaku a způsobují, že se stává radioaktivní. Proto se vyvíjejí nízkoaktivovatelné materiály, u kterých za několik desítek let klesne radioaktivita na velmi nízkou hodnotu: martensitické oceli, slitiny vanadu a křemíko-uhlíkové kompozity.

1.5. Nestability

Plazma je silně náchylné k různým nestabilitám a udržet jej magnetickým polem představuje jednu z hlavních obtíží ve vývoji tokamaků. Nestability zhoršují udržení plazmatu a často způsobují rychlý pokles teploty nebo vedou rovnou k prudkému vychladnutí a následné ztrátě plazmatu. Nebezpečí pro okolí ale nepředstavují, protože tak řídké plazma jaké je v tokamacích (zhruba milionkrát řidší než vzduch, tj. méně než gram v desítkách m³) při styku se stěnou nádoby okamžitě vychladne.

¹ Plyn bývá už částečně ionizován, aby došlo k výboji dříve a déle trvající plazma tak mělo možnost dosáhnout vyšších teplot.

Meze činnosti

Nestability se nejčastěji objevují po překročení mezních hodnot proudu, hustoty nebo parametru β (poměr tlaku plazmatu k tlaku magnetického pole v procentech).

Mezní proud je dán bezpečnostním faktorem, který na proud závisí přibližně vztahem $q \propto \frac{aB}{I} \frac{a}{R} \kappa$, kde a je malý (vodorovný) poloměr, R velký poloměr, B magnetické pole, I proud a κ svislé protažení (poměr svislého malého poloměru k malému vodorovnému poloměru a). Plazma v tokamaku obvykle ztrácí stabilitu pro $q < 3$ na kraji plazmatu. Pro velký proud je tedy potřeba velké svislé protažení κ a tloušťka toru (a/R). Ty jsou ale z technických a fyzikálních důvodů limitovány zhruba na hodnoty $\kappa \approx 1,8$ a $a/R \approx 1/3$, a tak je maximální proud určen hlavně součinem aB .

Mezní hustotu určuje tzv. Greenwaldova mez, která byla určena experimentálně: $n_G = \frac{I}{a^2 \pi}$, kde n_G je hustota elektronů v jednotkách 10^{20} částic na metr krychlový, a malý poloměr v metrech a proud I v MA.

Mezní β se "normalizuje" na maximální proud v tokamaku: $\beta_N = \beta \frac{aB}{I_{MAX}}$ a obvykle nemůže překročit několik procent.

Pilová nestabilita

Při zahřívání plazmatu se často pozoruje, že teplota v centru plazmatu po dosažení určitého maxima opakovaně strmě padá na nižší hodnotu a teplo tak přechází do krajnějších oblastí. Časová závislost teploty v centru plazmatu pak má tvar pilových zubů a odtud název nestability. Pilová nestabilita má za následek rychlejší chladnutí plazmatu a dosud nebyla uspokojivě vysvětlena.

Disrupce

Disrupce je náhlá nestabilita, při které přestane plazmatem protékat elektrický proud a magnetické udržení plazmatu se úplně zhroutí. Obvykle nastává při překročení mezní hodnoty proudu nebo hustoty. Potom během několika desítek milisekund vzrostou fluktuace magnetického pole. Následuje strmý pokles teploty plazmatu a zplošťování profilu proudu (tj. proudové závislosti na hlavním poloměru) v průběhu několika milisekund. Náhlá změna proudu vyvolá v plazmatu elektromotorické napětí (stejným způsobem jako primární vinutí tokamaku), které je až 100x větší než napětí vyvolané primárním vinutím a působí opačným směrem. Proud plazmatem pak padá k nule rychlostí, která může přesáhnout až 100MA/s, magnetické udržení plazmatu se hroutí a plazma vyhasíná.

Prudký zánik proudu v plazmatu a částice vržené na stěny nádoby potom způsobují velké tepelné, elektrické (indukce vířivých proudů) a také mechanické namáhání vakuové komory a cívek tokamaku, které mohou přesáhnout stovky tun. Snahy zabránit disrupcím zpětnovazebním řízením nebývají příliš úspěšné a proto se uvažuje o vstřelování "smrtících tablet", které by nahromaděnou energii z plazmatu vyzářily a zchladily tak plazma už v počátečním stádiu disrupce.

1.6. Fúzní reakce v tokamaku

V praxi užívaná definice fúzní reakce říká: fúzní reakce jsou jaderné reakce mezi lehkými jádry (lehčími než železo), při kterých se uvolňuje energie. Tím se částečně podtrhuje využitelnost fúzní reakce k získávání energie, protože aby mohlo slučování atomových jader v tokamaku sloužit k získávání energie, tak musí určitě platit:

- a) Reakce musí být exotermická (tj. musí uvolňovat energii).
- b) Protonové číslo reaktantů musí být malé. To proto, aby bylo možné atomy bez velkých energetických výdajů ionizovat a tím jejich jádrům dovolit, aby se mohla přiblížit dost blízko k navození fúzní reakce. Dalším důvodem jsou velké energetické ztráty vyzařováním pro velká protonová čísla (těžká jádra).
- c) Reakce musí mít navíc dostatečně velký účinný průřez (dostatečně velkou pravděpodobnost) při dosažitelných teplotách.

Z těchto kritérií vyplývají pro tokamaky hlavně fúzní reakce mezi izotopy vodíku:

DT reakce

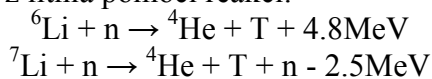
Při současných technologických možnostech se jako nejvýhodnější reakce k získávání energie jeví reakce mezi deuteriem a tritiem:



která má největší účinný průřez srážek při nejnižších teplotách.

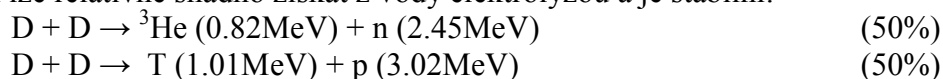
Nevýhodou je potřeba tritia, které je radioaktivní s poločasem rozpadu 12,3 roku a v přírodě se téměř nevyskytuje (vzniká v horních vrstvách atmosféry působením kosmického záření).

Tritium se proto musí vyrábět z lithia pomocí reakcí:

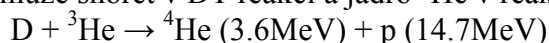


DD reakce

DD reakce probíhá se 100x menší pravděpodobností než DT reakce (v rozsahu teplot 10keV až 100keV). Přesto se ve většině tokamaků využívá k experimentům, protože deuterium lze relativně snadno získat z vody elektrolýzou a je stabilní:



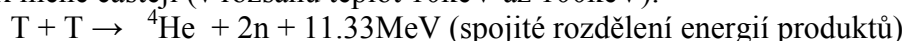
Vzniklé tritium pak ještě může shořet v DT reakci a jádro ${}^3\text{He}$ v reakci:



Pro úplnost je třeba uvést i třetí DD reakci, která ale oproti ostatním DD reakcím probíhá s mnohem menší pravděpodobností (asi 10^4 x menší): $D + D \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma + 23,85\text{MeV}$.

TT reakce

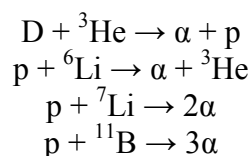
Tritium může shořet i samo se sebou v TT reakci, která ale oproti DT reakci probíhá zhruba 100x méně často (v rozsahu teplot 10keV až 100keV):



Nevýhodou všech těchto reakcí je vznik samostatných neutronů, které poškozují konstrukci tokamaku a způsobují jeho radioaktivitu. Na druhou stranu, výhodou neutronů je disipace uvolněné fúzní energie v objemu stěny, nikoli jen na povrchu. Druhým produktem těchto reakcí je neškodné hélium.

"Advanced" reakce

Zajímavou skupinou fúzních reakcí jsou tzv. "advanced" reakce, které neprodukují neutrony:



Velkou nevýhodou "advanced" reakcí oproti reakcím s izotopy vodíku je menší účinný průřez, potřeba vyšších teplot a vyšší ztráty vyzařováním.

Tabulka 1.2: Parametry českého tokamaku COMPASS, německého ASDEX, anglického JET a mezinárodního ITER (čerpáno z [9]):

reakce	σ (10keV) [barn]	σ (100keV) [barn]	σ_{MAX} [barn]	ε_{MAX} [keV]	Q [MeV]	
$D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n$	$2,78 \times 10^{-4}$	$3,7 \times 10^{-2}$	0,11	1750	3,27	reakce mezi izotopy vodíku
$D + D \rightarrow T + p$	$2,81 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-2}$	0,096	1250	4,04	
$D + D \rightarrow \alpha + \gamma$					23,85	
$D + T \rightarrow \alpha + n$	$2,72 \times 10^{-2}$	3,43	5	64	17,59	
$T + T \rightarrow \alpha + 2n$	$7,90 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-2}$	0,16	1000	11,33	
$D + {}^3\text{He} \rightarrow \alpha + p$	$2,2 \times 10^{-7}$	0,1	0,9	250	18,35	"advanced" reakce
$p + {}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + {}^3\text{He}$	6×10^{-10}	7×10^{-3}	0,22	1500	4,02	
$p + {}^7\text{Li} \rightarrow 2\alpha$					17,35	
$p + {}^{11}\text{B} \rightarrow 3\alpha$	$(4,6 \times 10^{-17})$	3×10^{-4}	1,2	550	8,68	

vysvětlivky:

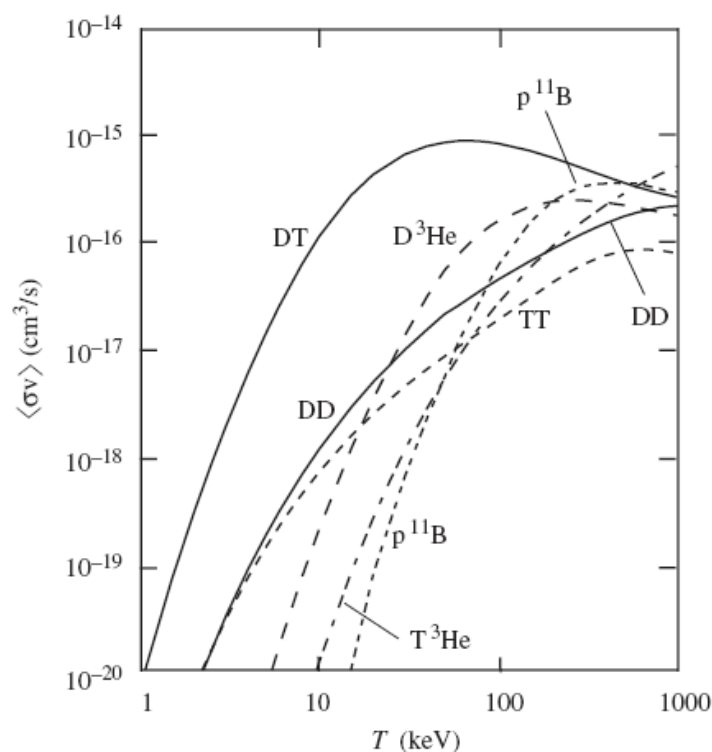
σ (10keV) - účinný průřez při teplotě 10keV

σ (100keV) - účinný průřez při teplotě 100keV

σ_{MAX} - maximální účinný průřez

ε - srážková energie pro maximální účinný průřez

Q - energetický výtěžek reakce



Obrázek 1.8: Závislost účinného průřezu (zprůměrovaného přes rychlost při Maxwellovském rozdělení rychlostí) na teplotě pro různé fúzní reakce. Převzato z [3].

1.7. Diagnostiky plazmatu v tokamaku

K řízení činnosti tokamaku je nutné znát stav plazmatu ve vakuové nádobě. Měření vlastností plazmatu v tokamaku ale není snadné, protože do tak horkého plazmatu není možné vložit žádný přístroj nebo pevnou sondu. Nejenže by takovou sondu horké plazma zničilo, ale hlavně by došlo k ochlazení a znečištění plazmatu. Proto jsou vlastnosti plazmatu získávány z měření záření vyzařovaného plazmatem, z vylétávajících částic nebo také vysláním laserového paprsku, mikrovlnného záření nebo neutrálních částic do plazmatu a následného měření jejich útlumu nebo rozptylu. I tak jsou ale sondy zářením, částicemi a vysokou teplotou silně namáhány. Diagnostik plazmatu je velké množství¹ (v moderních tokamacích i více než 50). Měří se energie plazmatu, teplota elektronů, teplota iontů, tlak plazmatu, ztráty vyzařováním, proud plazmatem, magnetické pole, hustota plazmatu a další. K určení jedné fyzikální veličiny se často využívá i více diagnostických metod a také hodnoty dalších veličin (např. výpočet profilu neutronové emisivity bere v úvahu nejen neutrony zachycené z různých směrů ale také magnetické pole, protože podél siločar magnetického pole se vlastnosti plazmatu příliš nemění). Většina měření se provádí jen pro určitý svislý průřez plazmatem, protože z axisymetrie tokamaku plyne, že plazma v tokamaku své vlastnosti v toroidálním směru příliš nemění.

Diagnostiky plazmatu můžeme rozdělit na aktivní a pasivní. Aktivní diagnostika využívá interakci částic nebo záření z plazmatem a tím plazma ovlivňuje. Pasivní diagnostika jen měří záření nebo částice vycházející z plazmatu.

¹ U tokamaku JET činní hrubá data (tj. nezpracovaná data ze senzorů) desítky GB na puls (tj. až 100GB denně), u tokamaku ITER se předpokládá několik TB na puls.

Měření teploty iontů¹

Plně ionizované plazma nevyzařuje v čárových spektrech (čárová spektra vznikají při sestupu elektronů v atomu na nižší energetické hladiny), ze kterých by se díky Dopplerově jevu dala zjistit teplota iontů (čím rychleji se iont pohybuje, tím více dochází k rozšíření spektrálních čar). Plazma v tokamaku ale obsahuje i nečistoty s vyšším protonovým číslem, které je těžší úplně ionizovat a tak jsou ionizovány jen částečně. Díky tomu lze zjistit i teplotu iontů vodíku, která za normálních okolností odpovídá teplotě nečistot a případný rozdíl lze odstranit úpravou ve výpočtech.

Spolehlivější měření teploty iontů, které lze navíc provádět v různých místech v plazmatu, lze získat vstřelováním neutrálních částic do plazmatu.

Neutrální částice svazku letící plazmatem rychlostí $\vec{v}$ se navíc dostávají do elektrického pole $\vec{v} \times \vec{B}$, a tak lze díky Starkově jevu (rozštěpení spektrálních čar ve vnějším elektrickém poli) v daném místě zjistit směr a sílu magnetického pole.

Měření teploty a hustoty elektronů

Hustota a teplota elektronů se měří především Thomsonovým rozptylem (tj. rozptylem fotonů na elektronech). Do plazmatu se vyše laserový paprsek a měří se jak moc se v daném směru rozptýlí. Z velikosti rozptylu zachyceného paprsku pak lze určit hustotu elektronů a z šířky spektra jejich teplotu (čím větší šířka spektra, tím větší teplota).

Variantou této diagnostiky je např. LIDAR (LIght Detection And Ranging), který se využívá i v dalších vědních oborech (např. archeologie, seismologie, geologie). Do plazmatu se vyše laserový paprsek o určité frekvenci, který se rozptýlí na elektronech a částečně odrazí zpět (LIDAR tedy pracuje na stejném principu jako radar). Vyhodnocuje-li se navíc šířka spektra a intenzita odraženého paprsku v různých časech, je možné díky známé rychlosti světla získat profil teploty a hustoty elektronů napříč plazmatem.

Měření magnetických polí

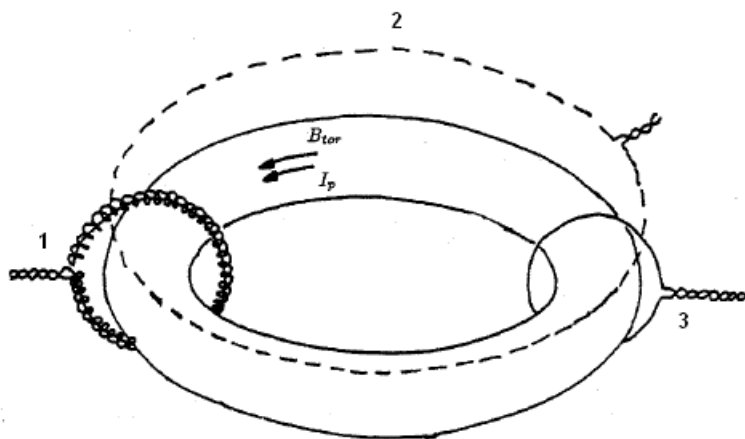
Měření magnetického pole využívají indukce elektromotorického napětí ve smyčkách, kterými prochází měnicí se magnetický tok (z Faradayova zákona pro napětí U platí: $U = -\dot{\Phi}$, kde $\dot{\Phi}$ je časová změna magnetického toku plochou, kterou smyčka uzavírá).

Rogowského cívka (viz obr. 1.9) měří poloidální magnetické pole na kraji plazmatu a tím i proud plazmatem (pro proud plazmatem I_p plyne z Ampérova zákona vztah: $U = -\dot{\Phi} = -nS\mu_0\dot{I}_p$, kde n je počet závitů na jednotku délky a S plocha, kterou Rogowského cívka uzavírá).

Jediná smyčka paralelně s torusem měří celkové magnetické pole vyvolávané primárním transformátorovým vinutím a tím i indukované napětí v plazmatu. Spolu s hodnotou proudu lze tak zjistit vodivost a z té teplotu elektronů.

Třetí smyčka na obrázku 1.9 měří diamagnetismus plazmatu (tedy míru tlumení magnetického pole v plazmatu). Z měnicího se magnetického toku smyčkou pak lze získat energii plazmatu.

¹ Teplota iontů a elektronů bývá zvláště v řídkém plazmatu různá. Je tomu tak díky jejich rozdílné hmotnosti. Při srážkách se pak energie přerozděluje rychleji mezi ionty nebo mezi elektrony než navzájem. Vyšší teplotu mívají obvykle lehčí elektrony, které elektromagnetické pole více rozpohybuje.



Obrázek 1.9: Měření magnetického pole pomocí Rogowského cívky (1), smyčka měřící napětí v plazmatu (2), smyčka měřící diamagnetismus plazmatu (3). Převzato a upraveno z [10].

Měření neutronů

Jak DD, tak DT reakce produkují neutrony a proto je měření neutronů důležitým ukazatelem fúzního výkonu. Neutrony se měří např. rozptylem na atomech vodíku. Protony, kterým tak neutrony předávají energii se pak měří např. scintilačními detektory (čím silnější záblesk dopad protonu způsobí, tím větší energii proton od neutronu získal) nebo neutronovým spektrometrem, ve kterém se proton odklání magnetickým polem a podle místa dopadu v detektoru se určí jeho energie.

1.8. Parametry vybraných tokamaků

Tabulka 1.2: Parametry českého tokamaku COMPASS, německého ASDEX, anglického JET a mezinárodního ITER (čerpáno z [9]):

	COMPASS COMPact ASSEMBly	ASDEX Upgrade Axially Symmetric Divertor EXperiment	JET Joint European Torus	ITER International Thermonuclear Experimental Reactor
Hlavní poloměr [m] (poloměr prstence)	0.56	1.67	2.96	6
Vedlejší poloměr [m] (horizontální x vertikální)	0.23 x 0.38	0.5 x 0.8	1.25 x 2.1	2 x 3.6
Objem plazmatu [m ³]	0.5	13	80-100	840
Proud plazmatem	200-400 kA	400-1400 kA	5 MA	17 MA
Magnetické pole [T]	0.8-2.1 bez předeptnutí komory jen do 1.2	< 3.1	< 4	< 6
Délka výboje	< 1 s	< 10 s	< 60 s	500-1000 s
Typická doba udržení částic	5-20 ms	50-200 ms	0.1-1 s	4 s
Teplota plazmatu	~ 1 keV ~ 11 000 000 K	5-15 keV < 170 000 000 K	5-25 keV < 290 000 000 K	~ 20 keV ~ 230 000 000 K
Hustota plazmatu [m ⁻³]	10 ¹⁹ -10 ²⁰	až 10 ²⁰	10 ²⁰	10 ²⁰
Dodatečný ohřev	NBI 2x 300 kW později LH+CD 400 kW	NBI 20 MW ICRH 6 MW ECRH 2x2 MW	NBI 22 MW ICRH 22 MW LH+CD 7 MW	NBI 2x16 MW ICRH 20 MW LH+CD 20 MW ECRH 20 MW

vysvětlivky:

NBI - ohřev neutrálními svazky (Neutral Beam Injection)

ICRH - iontová cyklotronová rezonance (Ion Cyclotron Resonance Heating)

ECRH - elektronová cyklotronová rezonance (Electron Cyclotron Resonance Heating)

LHCD - dolně hybridní rezonance s vlečením proudu (Lower Hybrid Current Drive)

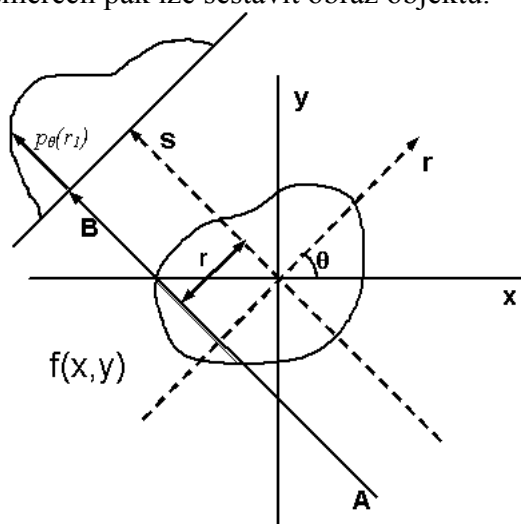
2. Tomografie

2.1. Tomografie obecně

Tomografie¹ je metoda, která umožňuje zobrazit průřez měřeného objektu (resp. průřez měřené fyzikální veličiny objektem) aniž by bylo nutné měřený objekt porušit. Tomografických metod je velké množství a využívá se v řadě vědních oborů (např. v medicíně, archeologii, biologii a geofyzice). Obvykle se průřez měřeného objektu (tomografický obraz neboli tomogram) sestavuje z projekcí (např. z projekcí útlumu záření) v různých úhlech matematickou metodou zvanou tomografická rekonstrukce².

Tomografická rekonstrukce

Různé tomografické metody využívají k sestavení obrazu objektu odlišná měření. Většina je ale založena na stejném principu. Například v počítačové tomografii, která je často využívána v lékařství, je objekt ozařován z různých úhlů rentgenovým zářením. Z projekcí útlumu záření v různých směrech pak lze sestavit obraz objektu.



Obrázek 2.1: Projekce objektu pod úhlem θ . Převzato z <http://www.wikipedia.org>.

Počáteční intenzita I_0 paprsku procházejícího zkoumaným objektem pod úhlem θ ve vzdálenosti r od zvolené středové osy (viz obr. 2.1) bude potom zeslabena podle rovnice $I = I_0 e^{-p}$, kde p je celkový útlum paprsku. Každému bodu (x,y) ve zkoumaném objektu lze přiřadit koeficient útlumu $\mu(x,y)$ a celkový útlum paprsku p pak lze brát jako integrál koeficientu útlumu podél přímky, kterou paprsek prochází:

$$p(r, \theta) = \int \mu(x, y) ds. \quad (2.1)$$

Rovnici pro celkový útlum paprsku (2.1) pak lze s uvážením vztahu $r = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ přetransformovat do tvaru:

$$p(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) = \int \mu(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - r) dx dy, \quad (2.2)$$

¹ Slovo tomografie pochází z řeckých slov *τόμος* (*tomos*), které se dá přeložit jako „řez, výřez“ a *γράφειν* (*gráphein*), které znamená „malovat, psát“.

² Matematické základy tomografické rekonstrukce položil rakouský matematik Johann Radon (1887-1956), který se narodil v Děčíně.

kde δ je Diracova funkce¹. Vztah (2.2) je také znám pod názvem Radonova transformace (obecně může mít více rozměrů).

Z tzv. řezového teorému plyne, že k nalezení přesného obrazu objektu (resp. obrazu koeficientů útlumu) je potřeba provést projekce pro nekonečně mnoho úhlů a nekonečně mnoho vzdáleností od středové osy (a také tak, aby projekce zabíraly celý objekt). Nalezením zpětné Radonovy transformace je pak možné přesný obraz objektu sestavit. V praxi se ale k sestavení obrazu objektu využívají jiné metody, protože projekce lze naměřit jen pro omezený počet diskrétních hodnot a zpětná Radonova transformace je pak příliš ovlivňována šumem.

2.2. Tomografie fúzních neutronů v tokamaku JET

2.2.1. Měření pro tomografickou rekonstrukci emisivity neutronů

Fúzní reakce s deuteriem a tritiem produkují neutrony a proto lze sestavením tomografického obrazu emisivity neutronů (tj. počtu neutronů vyzářených z jednotky objemu za jednotku času) získat také obraz fúzního výkonu plazmatu v tokamaku².

V tokamaku není možné provést tomografii neutronů s takovou přesností jakou má například počítačová tomografie (CT), protože počet průhledů do tokamaku je z konstrukčních důvodů omezený. Značnou část prostoru kolem toru tokamaku zabírají např. cívky vytvářející magnetické pole tokamaku a detektory navíc komplikují vytváření vakua, jsou drahé a mnohé se v nepřátelském prostředí tokamaku rychle poškozuji.

Dalším problémem je, že do detektorů přicházejí také v malém množství neutrony z fotonukleárních reakcí (reakce fotonu s jádrem atomu), neutrony rozptýlené od stěn tokamaku a neutrony z jaderných reakcí nečistot. Takové neutrony mívají obvykle jiné hodnoty energie a tak je možné jejich podíl v naměřených neutronech snížit vhodnou volbou energetických mezí citlivosti detektorů.

V tokamaku JET umožňují měření pro tomografickou rekonstrukci emisivity neutronů dvě kamery, které snímají neutrony (a také γ záření) z deseti horizontálních a devíti vertikálních směrů (viz obr. 2.2) s časovým rozlišením 10ms a s prostorovým rozlišením okolo 15cm. V každém z celkem devatenácti směrů míří tři scintilační detektory:

a) Tekutý organický scintilátor NE213 měří současně neutrony z DD reakcí (tj. neutrony s energií kolem 2,5MeV), rychlé neutrony z DT reakcí (s energií kolem 14,1MeV) a záření γ , které vzniká z jaderných reakcí. Z tvaru pulzu z fotonásobiče připojeného na detektor je pak možné neutrony z DD reakcí, neutrony z DT reakcí a γ záření rozlišit.

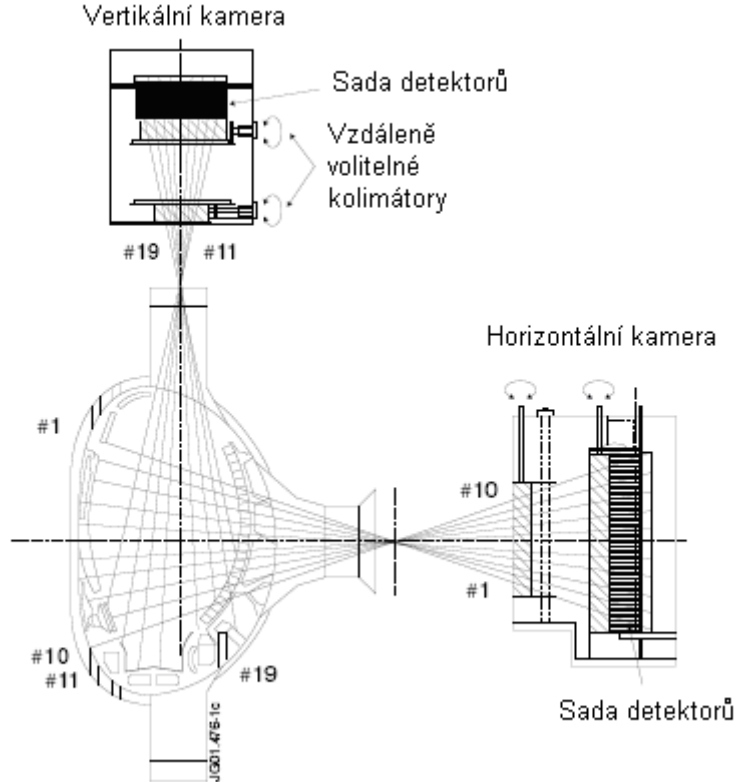
b) Plastický scintilátor BC418 je necitlivý pro γ záření a pro neutrony s energií pod 10MeV a měří tak výhradně rychlé neutrony z DT reakcí.

c) Třetí detektor CsI(Tl) provádí měření γ záření v rozsahu 0,2MeV až 6 MeV (tj. o frekvenci $48 \cdot 10^{18}$ Hz až $1,5 \cdot 10^{21}$ Hz).

¹Diracova delta funkce je "funkce" (přesněji distribuce) s vlastnostmi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \delta(0) = \infty \text{ a } \delta(x) = 0 \text{ pro } x \neq 0.$$

² Objem plazmatu v tokamaku JET dosahuje až 100m³ a produkuje až 10¹⁸ neutronů za sekundu. Podstatným zdrojem neutronů je přitom oblast o velikosti zpravidla nepřesahující 40m³.



Obrázek 2.2: Měření profilu emisivity neutronů v poloidálním řezu na tokamaku JET. Převzato z [11] (popisky přeloženy do češtiny).

2.2.2. Tomografická rekonstrukce profilu emisivity neutronů

Dvourozměrný tomografický obraz lze rozložit na sít plošných elementů neboli pixelů. Na signál f_i (počet zachycených neutronů) z určitého směru se pak lze dívat jako na lineární kombinaci emisivity jednotlivých pixelů

$$f_i = \sum_j^N T_{ij} g_j + \zeta_i, \quad i \in \hat{L}, \quad (2.3a)$$

kde g_j je emisivita j-tého pixelu (mřížka pixelů je zde tedy brána jako vektor), N počet pixelů, L počet detektorů, T_{ij} vliv j-tého pixelu na signál f_i a ζ_i statistická a systematická chyba. Zanedbáním rozbíhavosti zorného pole detektoru¹ lze pro dostatečně úzké zorné pole vzít za hodnotu T_{ij} vzdálenost, s jakou i-tý detektor protne j-tý pixel (viz obr. 2.3), vynásobenou geometrickou kalibrační konstantou

$$\frac{\Omega_i}{4\pi},$$

kde Ω_i je zorný úhel i-tého detektoru.

Řešení určující vektor $\mathbf{g}$ je možné buď hledat iterativně, nebo je třeba nalézt vhodnou zpětnou transformaci k soustavě rovnic (2.3). Tedy matici M , pro kterou bude platit:

$$g_j = \sum_i^L M_{ji} f_i \quad (2.3b)$$

¹ V tokamaku JET má zorné pole detektoru na konci plazmatu šířku až 40cm.

Nabízí se možnost přímo vypočíst inverzní matici k transformační matici $\mathbf{T}$, jenže takový výpočet není zpravidla možný, protože matice $\mathbf{T}$ nebývá čtvercová (počet neznámých g_j je větší než počet rovnic, úloha je nedostatečně určená) a navíc může být matice $\mathbf{T}$ špatně podmíněná a inverzní matice $\mathbf{T}^{-1}$ by tak byla příliš ovlivňována šumem vzniklým kvůli zanedbání chyb ζ_i .

Iterativní řešení určující vektor $\mathbf{g}$ je hledáním minima výrazu:

$$\sum_i^L \left(f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j \right)^2. \quad (2.4)$$

Pro nedostatečně určenou obdélníkovou matici $\mathbf{T}$ může ale existovat neomezený počet možných řešení $\mathbf{g}$ (tj. $\mathbf{g}$ pro které je výraz (2.4) roven nule) a je třeba vybrat takové, které je co nejbližší předpokládanému stavu. K výrazu (2.4) se proto přidává tzv. regularizační funkcionál, který závisí na zvolené metodě řešení $\mathbf{g}$. V praxi se pak hledá minimum funkcionálu¹:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \chi^2 + \lambda_R R, \quad \text{tj. řeší se soustava rovnic } \frac{\partial \Lambda}{\partial g_j} = 0, \quad j \in \hat{N},$$

$$\text{kde } R \text{ je regularizační funkcionál, } \chi^2 = \frac{1}{L} \sum_i^L \left(\frac{f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j}{\sigma_i} \right)^2, \quad \sigma_i \text{ předpokládaná chyba dat v } i-$$

tém detektoru (dělením σ_i se zaručuje, aby na hledání řešení měla menší vliv data s větší předpokládanou chybou) a λ_R regularizační parametr, který určuje váhu regularizačního funkcionálu na hledání řešení. Pro λ_R blízké nule je minimum Λ určeno především hodnotou χ^2 a naopak pro velká λ_R má na nalezení řešení velký vliv regularizační funkcionál R . Úlohou tedy není jen nalézt řešení $\mathbf{g}$ ale také správnou hodnotu parametru λ_R .

Hodnota χ^2 se obvykle nehledá menší než 1, protože nemá smysl hledat řešení s odchylkou od naměřených dat menší než je předpokládaná chyba. V nedostatečně určených systémech se zpravidla stanovuje λ_R iterací tak, aby χ^2 bylo blízké jedné.

2.2.3. Tichonova regularizace omezená minimem Fisherovy informace

Jendou z nejpoužívanějších metod, která se snaží nalézt vhodné řešení k soustavě rovnic (2.1) je tzv. Tichonova regularizace. Tu lze dále omezit minimem Fisherovy informace (Minimum Fisher Regularization - dále jen MFR), která byla poprvé popsána v [13]. Řešení se hledá minimalizací funkcionálu:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2} \chi^2 + \lambda_R I_F.$$

Regularizačním funkcionálem je zde Fisherova informace I_F . Obecně je pro pravděpodobnostní rozdělení $g(x)$ definována vztahem

$$I_F = \int \frac{1}{g} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 dx$$

a souvisí také s rozptylem rozdělení σ^2 nerovností $\sigma^2 \geq 1/I_F$.

¹ Jedná se vlastně o metodu Lagrangeových multiplikátorů, kdy se hledá minimum funkce na určité přípustné množině.

Minimalizací Fisherovy informace se tedy hledá rozdělení s největším rozptylem a vlastně jde o takové řešení, které je více hladké pro malé hodnoty $g(x)$ (jak plyne z g ve jmenovateli ve vztahu pro I_F) a méně pro velké hodnoty $g(x)$.

Minimum Λ_{MF} lze nalézt řešením soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_j} = 0, \quad j \in \hat{N}.$$

Fisherovu informaci lze pro vektor $\mathbf{g}$ přepsat na tvar:

$$I_F = \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} \frac{1}{g_j} B_{jl} g_l = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \mathbf{g}^T \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad (2.5)$$

kde matice $\mathbf{B}$ reprezentuje operátor numerických derivací vektoru $\mathbf{g}^1$ a pro matici $\mathbf{W}$ platí: $W_{ij} = \delta_{ij} / g_j$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta.

Funkcionál Λ_{MF} pak má tvar:

$$\Lambda_{MF} = \frac{1}{2} \sum_i^L \left(\tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right)^2 + \alpha_R \sum_{i,j,k,l} g_k B_{kj} W_{ji} B_{il} g_l = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g})^T (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g}) + \alpha_R \mathbf{g}^T \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g},$$

kde $\tilde{T}_{ij} = T_{ij} / \sigma_i$, $\tilde{f}_i = f_i / \sigma_i$.

Derivace takového funkcionálu Λ_{MF} podle jednotlivých složek vektoru $\mathbf{g}$ by však vedly k nelineárním rovnicím, a tak se v případě Tichonovy regularizace řešení zjednodušuje lineárním přiblížením. Za matici $\mathbf{W}$ se nejprve zvolí jednotková matice. Výsledkem derivací Λ_{MF} podle jednotlivých složek vektoru $\mathbf{g}$ jsou pak lineární rovnice, které se vyřeší vzhledem k vektoru $\mathbf{g}$:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \left(\left(\tilde{f}_i - \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j \right) \cdot (-\tilde{T}_{ir}) \right) + \alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l + \alpha_R \sum_{i,j,k} g_k B_{kj} W_{ji} B_{ir} = 0, \quad r \in \hat{N},$$

což lze zjednodušit do tvaru:

$$\frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_r} = \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \sum_j^N \tilde{T}_{ij} g_j - \sum_i^L \tilde{T}_{ir} \tilde{f}_i + 2\alpha_R \sum_{i,j,l} B_{rj} W_{ji} B_{il} g_l = 0, \quad r \in \hat{N},$$

neboť matice $\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$ je symetrická.

Derivace Λ_{MF} podle složek vektoru $\mathbf{g}$ tedy vedou k soustavě rovnic:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_1} \\ \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda_{MF}}{\partial g_N} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{f}} + 2\alpha_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{g} = 0$$

¹ Matice $\mathbf{B}$ je tvořena takovými členy (např. $\pm 1/\Delta x$, kde Δx představuje velikost pixelů), aby Fisherova informace obsahovala všechny potřebné numerické derivace vektoru $\mathbf{g}$.

a pro vektor $\mathbf{g}$ pak plyne vztah:

$$\mathbf{g} = \left(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f}, \text{ kde } \lambda_R = 2\alpha_R \quad (2.6)$$

V následujících krocích pak v těchto rovnicích obsahuje matice $\mathbf{W}$ předchozí řešení vektoru $\mathbf{g}$ a řešení $\mathbf{g}$ se tedy hledá iteračně:

$$\mathbf{g}^{(n+1)} = \left(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f}, \text{ kde } n \text{ je počet vykonaných kroků a } W_{ij} = \delta_{ij} / g_j^{(n)}.$$

Ukazuje se, že takový postup velmi rychle konverguje (stačí 2 nebo 3 cykly) ke správnému řešení.

V dvourozměrném případě může mít pak vztah (2.6) tvar:

$$\mathbf{g} = \left(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \mathbf{B}_X^T \mathbf{W} \mathbf{B}_X + \lambda_R \mathbf{B}_Y^T \mathbf{W} \mathbf{B}_Y \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f},$$

kde $\mathbf{B}_X$ reprezentuje operátor numerických derivací vektoru $\mathbf{g}$ podle souřadnice x a $\mathbf{B}_Y$ podle souřadnice Y .

Plazma obvykle příliš nemění své vlastnosti ve směru magnetického pole a proto je výhodné sledovat derivace např. emisivity neutronů podél a napříč magnetických siločar:

$$\mathbf{g} = \left(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}} + \lambda_R \left(\frac{1}{\eta} \mathbf{B}_{par}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{par} + \eta \mathbf{B}_{perp}^T \mathbf{W} \mathbf{B}_{perp} \right) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{f}, \quad (2.7)$$

kde $\mathbf{B}_{par}$ reprezentuje operátor numerických derivací ve směru magnetických siločar, $\mathbf{B}_{perp}$ napříč magnetických siločar a parametr η určuje jejich vzájemnou váhu. Např. pro $\eta < 1$ mají ve Fisherově informaci větší váhu derivace podél magnetických siločar a proto se při minimalizaci Fisherovy informace vyhlazují hodnoty $\mathbf{g}$ více podél směru magnetického pole než v příčném směru. Obvykle se tvar magnetického pole určí jednou na začátku měření a v dalších časových krocích se předpokládá zanedbatelná změna tvaru magnetického pole vzhledem k přesnosti tomografické rekonstrukce.

2.2.4. Výpočetní algoritmus

V počítači probíhá MFR ve dvou cyklech. Vnější cyklus minimalizuje Fisherovu informaci (obvykle stačí 3 cykly) prostřednictvím váhové matice $\mathbf{W}$. Ta je ještě normalizována maximální hodnotou hledaného vektoru $\mathbf{g}$:

$$w_k(n=1) = 1, \quad w_k(n > 1) = \frac{\max_{k \in \{1, 2, \dots, N\}} (g_k(n-1))}{g_k(n-1)}, \quad (2.8)$$

kde n je číslo vnějšího cyklu. Následuje výpočet vektoru $\mathbf{g}$ (podle vztahu (2.6)):

$$A_{ji} = \sum_l^L T_{il} T_{lj} + \lambda_R \sum_k^N B_{ik} w_k B_{kj} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T} \quad (2.10)$$

$$g_j = \sum_i^L M_{ji} f_i \quad (2.11)$$

Vnitřní cyklus obměňuje hodnotu λ_R (např. Newtonovou metodou) tak, aby χ^2 bylo blízké jedničce:

$$\chi^2(\lambda_R) = \frac{1}{L} \sum_i^L \left(\frac{f_i - \sum_j^N T_{ij} g_j}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow 1, \quad (2.12)$$

kde vektor $\mathbf{g}$ je nejdříve znovu vypočítán pomocí vztahů (2.9), (2.10) a (2.11). Cyklus běží dokud nenalezne χ^2 s dostatečnou přesností nebo nedosáhne určitého maximálního počtu opakování.

Může se stát, že hodnota nějaké složky vektoru $\mathbf{g}$ vyjde záporná, což neodpovídá možné fyzikální skutečnosti. V takovém případě se v MFR taková hodnota podkládá rovná nule.

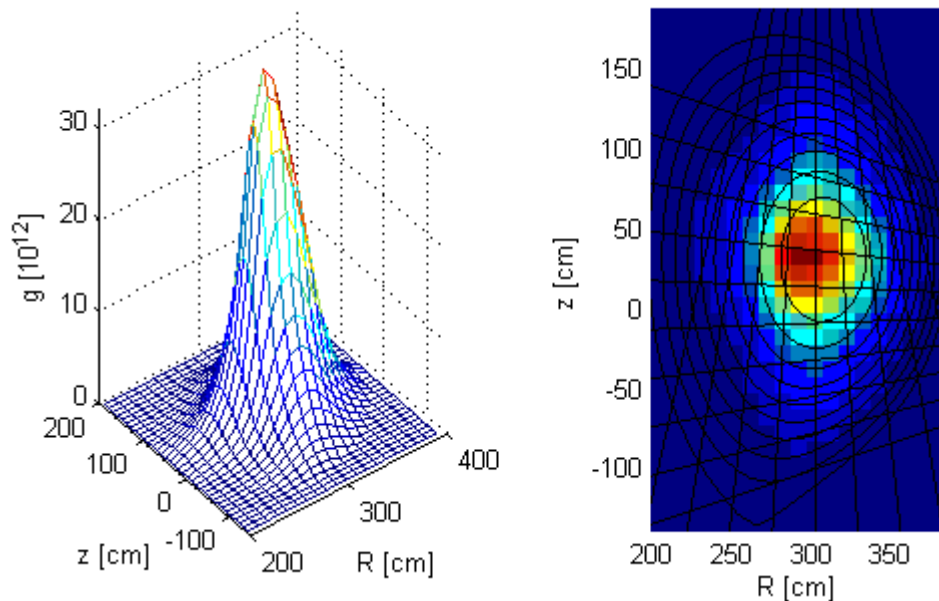
Hlavní výhodou MFR je, že skutečně nalézá přímé řešení, tedy matici $\mathbf{M}$ do výrazu (2.3b), což je z uživatelského hlediska velmi praktické. Vedle toho je známo, že Tichonova regularizace poskytuje velmi robustní řešení (tj. nachází hladké řešení poměrně spolehlivě, ve velmi širokém oboru aplikací). Další výhodou je, že lze algoritmus snadno převést i na případ s časovým průběhem. Vztahy (2.8) až (2.12) potom přejdou do tvarů:

$$\begin{aligned} w_k(n=1) &= 1, & w_k(n) &= \frac{\max_{k \in \{1,2,\dots,N\}} \left(\sum_t^S g_{kt}(n-1) \right)}{\sum_t^S g_{kt}}, \\ A_{ji} &= \sum_l^L T_{il} T_{lj} + \lambda_R \sum_k^N B_{ik} w_k B_{kj}, & \mathbf{M} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T}, \\ g_{jt} &= \sum_i^L M_{ji} f_{it}, & \chi^2 &= \frac{1}{S} \frac{1}{L} \sum_t^S \sum_i^L \left(\frac{f_{it} - \sum_j^N T_{ij} g_{jt}}{\sigma_i} \right)^2, \end{aligned}$$

kde t je časový index a S počet časů, pro které MFR probíhá.

2.2.5. Užité mřížka pixelů

Všechny tomografické rekonstrukce v této práci probíhají na mřížce 20x34 pixelů (celkem tedy 680 pixelů) o velikostech 10x10cm (viz např. obr 2.3). Tomografický obraz emisivity neutronů tak zaujímá v tokamaku JET prostor (ve svislé rovině) od 197,2cm až do 397,2cm ve vzdálenosti od hlavní osy a ve výšce (tj. ve vzdálenosti od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu) od -145cm do 195cm



Obrázek 2.3: Příklad užití MFR: Vypočtená emisivita neutronů pulzu č. 61161 na tokamaku JET po jedenácti sekundách od zažehnutí plazmatu¹. Souřadnice R představuje vzdálenost od hlavní osy, souřadnice z výšku (vzdálenost od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu) a hodnoty g emisivity neutronů (počet neutronů vyzářených z pixelu do okolního prostoru za sekundu). Na obrázku vpravo je emisivita vyznačena barevným spektrem (červená pro největší hodnoty a modrá pro nejnižší) spolu s vykreslením magnetických povrchů a směrů průhledů detektorů. Shlazování rekonstruované funkce probíhalo podle magnetických siločar (tj. podle vztahu 2.7) s parametrem $\eta = 0,37$.

2.3 Chyby tomografické rekonstrukce pomocí MFR

2.3.1. Modelová funkce

Je otázkou, nakolik se tomografický obraz zjištěný pomocí MFR liší od skutečného profilu emisivity neutronů v plazmatu. Přibližnou představu o spolehlivosti MFR lze získat porovnáním uměle vytvořené modelové funkce emisivity neutronů s její tomografickou rekonstrukcí (viz obr. 2.5).

Je vhodné, aby se modelová funkce podobala skutečnému profilu emisivity neutronů. Dobrý odhad takové modelové funkce lze získat uvážením poloidálního průřezu teploty a hustoty částic v plazmatu. Nabité částice obíhají podél magnetických siločar (viz obr. 2.4). Magnetické pole je přitom silnější blíže k hlavní ose² (středu tokamaku) a tak jsou nabitě částice s menší rychlostí podél magnetického pole odvraceny zpět do oblasti s menším magnetickým polem (takovým trajektoriím se podle jejich tvaru říká banánové orbity).

¹ Tedy po jednapadesáti sekundách od vpuštění proudu do cívek tokamaku JET, neboť k zažehnutí plazmatu dochází zpravidla o čtyřicet sekund později. Databáze JET uvádějí tento delší časový údaj, což občas vede k nedorozumění.

² Na obr. 2.3 jsou siločáry hustší na vnější straně plazmatu, ale znázorňují jen poloidální složku magnetického pole. V kombinaci se silnějším toroidálním polem je výsledné magnetické pole silnější směrem ke středu tokamaku.

Vhodnou modelovou funkcí může být např. funkce:

$$g(r, R(r), \mathcal{G}) = 1 - r^b + a(1 + \cos(\pi R^m))(1 + \cos(\mathcal{G}^p \pi)), \quad (2.12)$$

kde parametr b je exponent základního profilu, a amplituda a m, p exponenty té části profilu, která je způsobena banánovými orbitami, r je vzdálenost od vedlejší osy plazmatu (viz obr. 1.5) normovaná na interval $\langle 0, 1 \rangle$, $R(r)$ je transformace r , která rovnoměrně převede vymezený interval $\langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle$ (tj. interval r , ve kterém jsou simulovány částice s banánovými orbitami) do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a za hodnoty r mimo vymezený interval dosadí příslušné krajní hodnoty intervalu $\langle -1, 1 \rangle$:

$$R = \begin{cases} 2 \frac{r - r_{MAX}}{r_{MAX} - r_{MIN}} + 1 & , \text{pro } r \in \langle r_{MIN}, r_{MAX} \rangle \\ 1 & , \text{pro } r > r_{MAX} \\ -1 & , \text{pro } r < r_{MIN} \end{cases}$$

(jak se lze přesvědčit dosazením r_{MAX} a r_{MIN} za r), $\mathcal{G}$ je násobek úhlu rovnoměrně přetransformovaný z poloidálního úhlu φ tak, aby interval $\langle -\varphi_{MIN}, \varphi_{MAX} \rangle$ (tj. interval poloidálního úhlu, ve kterém se pohybují částice s banánovými orbitami) patřil do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (celkový úhel $\mathcal{G}^p \pi$ v posledním argumentu vztahu (2.12) pak probíhá v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$):

$$\mathcal{G} = 2 \frac{\varphi - \varphi_{MAX}}{\varphi_{MAX} - \varphi_{MIN}} + 1.$$

Užitá modelová funkce je modelována s časovým vývojem o deseti krocích s parametry:

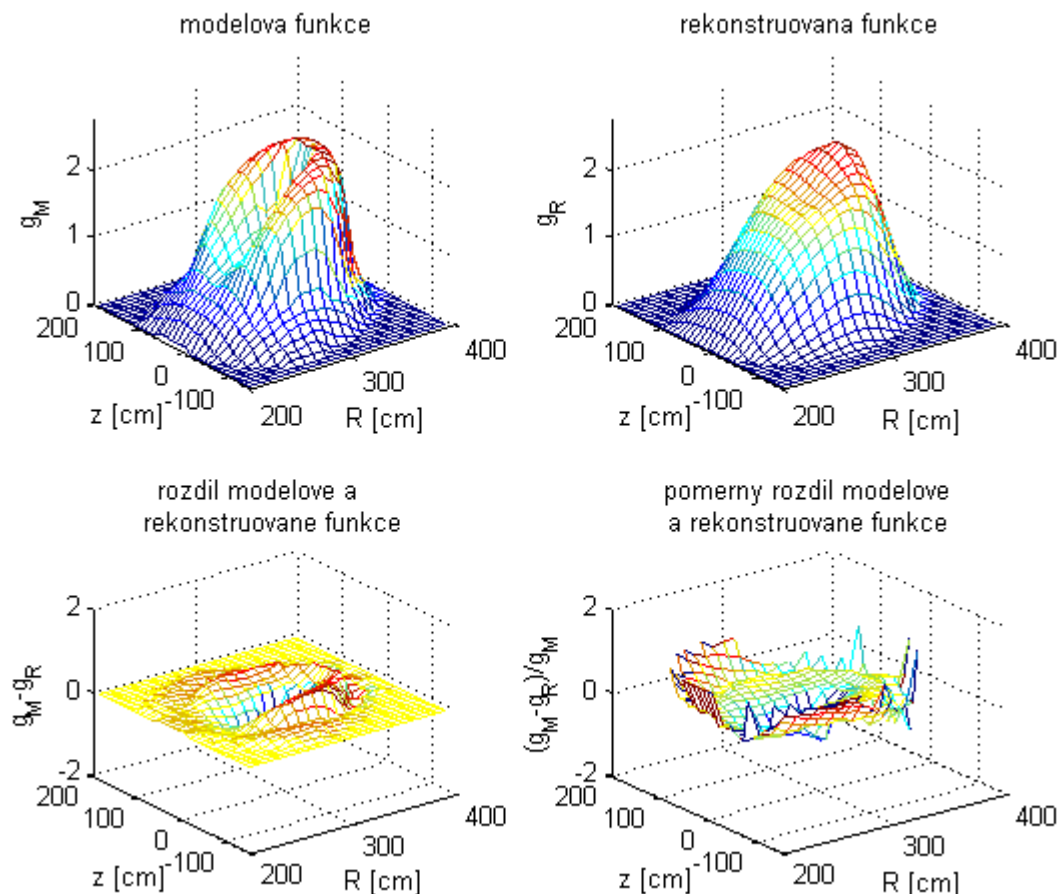
$$b = 3, \quad m = 2, \quad r_{MIN} = 0,1, \quad r_{MAX} = 0,8, \quad p = 2, \\ \varphi_{MAX} = \pi, \quad \varphi_{MIN} = -\pi, \quad a(t) = 0 + 0,05(t-1), \quad (2.13)$$

kde t je index času.

poznámka:

V celé kapitole platí následující značení:

- z pro vzdálenost od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu (souřadnice výšky),
- R pro vzdálenost od hlavní osy tokamaku,
- g_R pro tomografickou rekonstrukci příslušné funkce,
- g_M pro modelovou funkci.

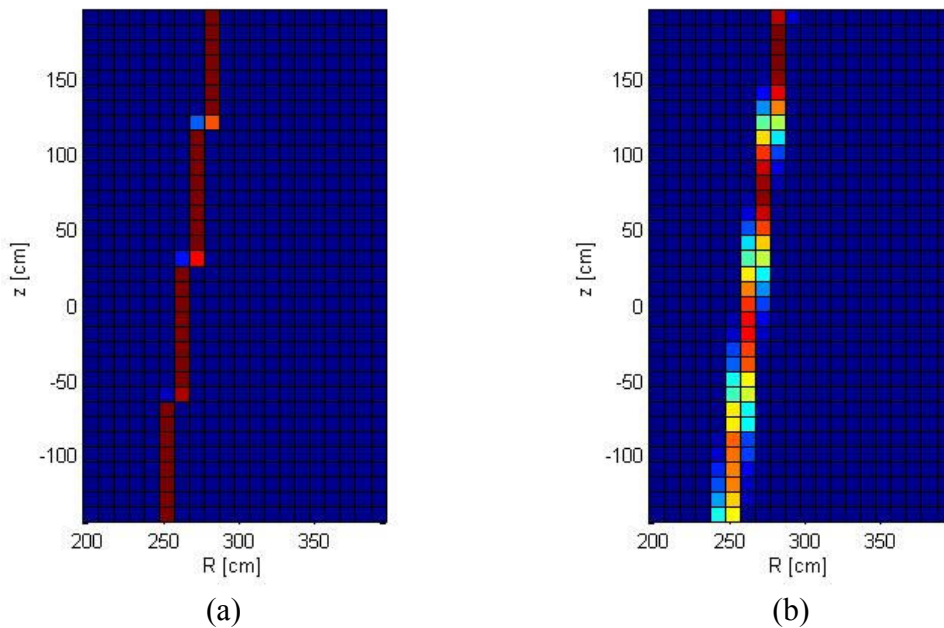


Obrázek 2.4 Porovnání modelové funkce (g_M) a její tomografické rekonstrukce (g_R) pro desátý časový krok ($t=10$, viz vztahy (2.12) a (2.13))

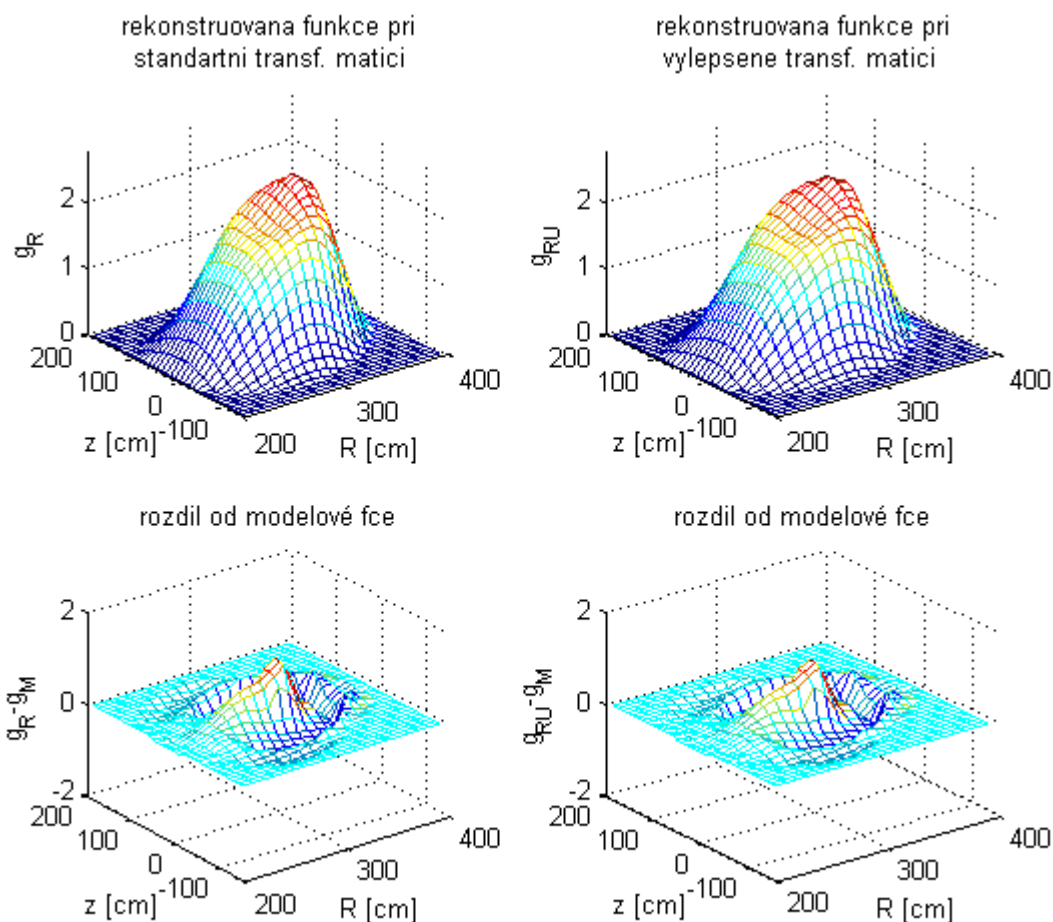
Z obrázku 2.4 je patrné, že rekonstruovaná funkce je zřejmě hladší než modelová a hůře tedy sleduje ostřejší změny modelové funkce. K největším relativním chybám dochází převážně na okraji plazmatu (kde může relativní chyba dosáhnout až 100%, jak plyne z obr. 2.4). Průměrná absolutní odchylka všech nenulových hodnot modelové funkce od rekonstruované má v tomto případě hodnotu 0,2 (to odpovídá asi 20% z průměru všech nenulových hodnot modelové funkce). Průměrná relativní odchylka všech nenulových hodnot (viz obr 2.4 vpravo dole) dosahuje přibližně 30%. Je tedy procentuálně o něco vyšší než podíl střední absolutní odchylky na střední hodnotě funkce, což je způsobeno tím, že u nižších hodnot modelové funkce bývá větší relativní odchylka od rekonstruované funkce (viz obr 2.4). Maximální absolutní odchylka má hodnotu 0,73 (nachází se přibližně uprostřed rekonstruované funkce, kde dochází k největšímu shlazování), což odpovídá asi 27% z maximální hodnoty modelové funkce (maximum modelové funkce má v tomto případě hodnotu 2,73).

2.3.2. Vylepšená transformační matice

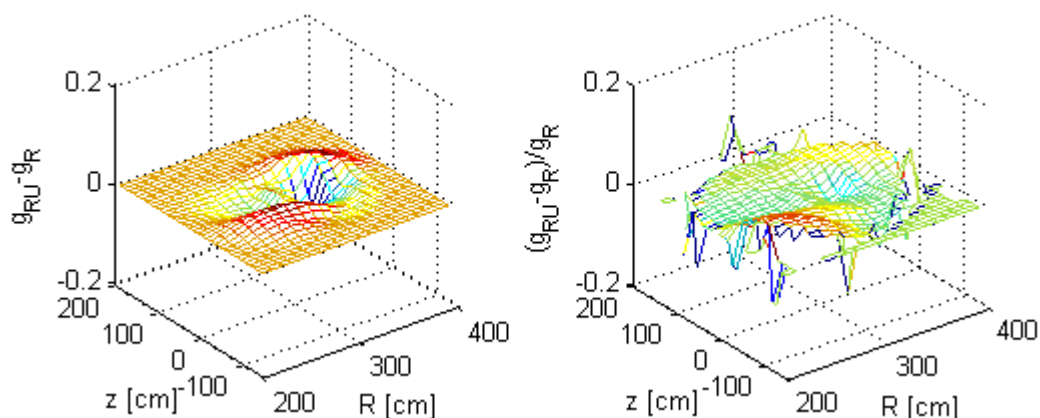
Standardní transformační matice T (viz vztah (2.3)) zanedbává rozbíhavost zorných polí detektorů. Zorné pole detektoru může mít ovšem na okraji plazmatu šířku až 40cm a proto je zřejmě žádoucí zavést transformační matici, která bude rozbíhavost zorných polí detektorů zahrnovat (viz obr. 2.5).



Obrázek 2.5: Barevně vyznačený vliv pixelů o standardní velikosti 10x10cm na třináctý detektor se zanedbáním rozbíhavosti zorného pole detektoru (a) a s přihlédnutím k rozbíhavosti zorného pole detektoru (b).



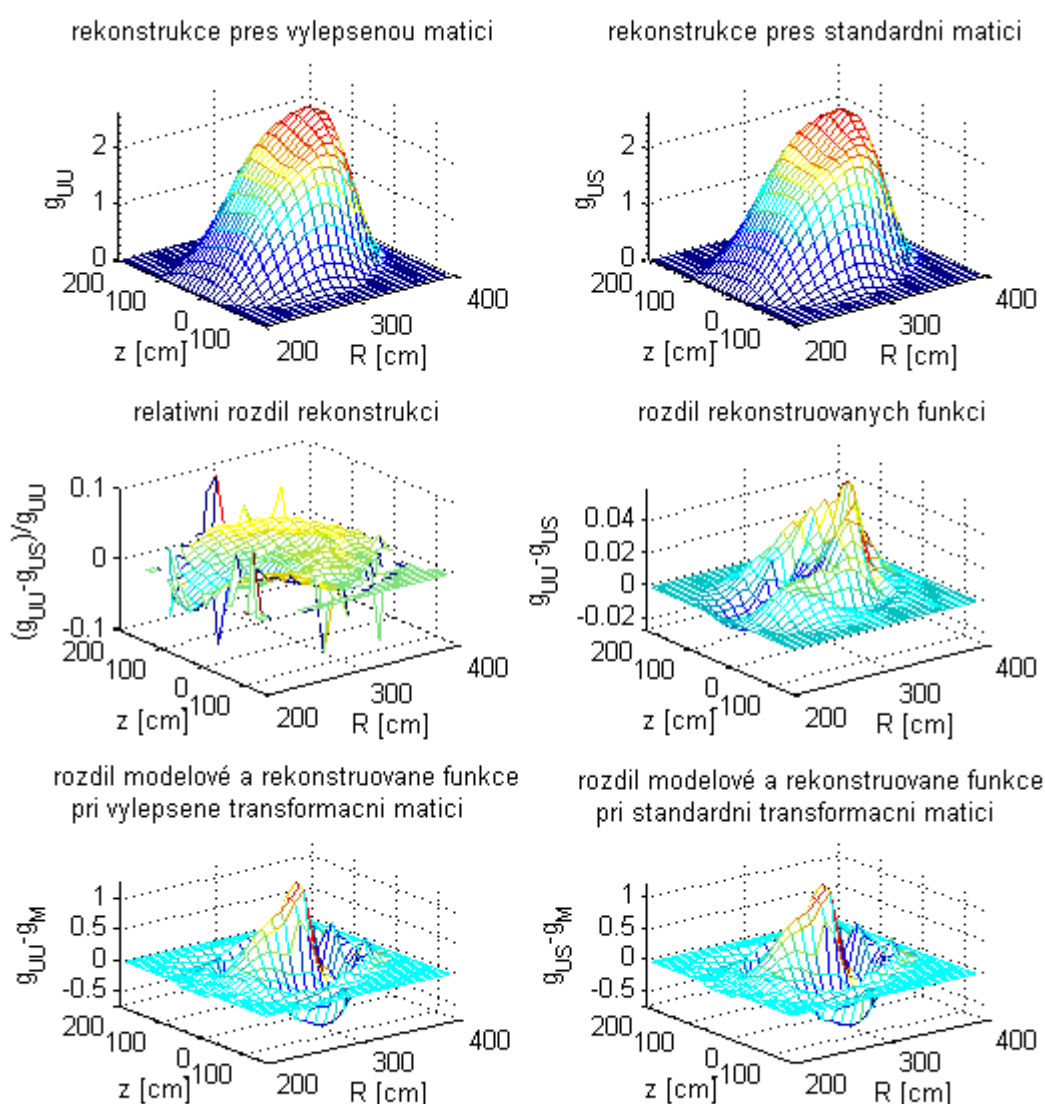
Obrázek 2.6: Porovnání tomografických rekonstrukcí přes standardní transformační matici (g_R) a vylepšenou (g_{RU}) s modelovou funkcí (g_M).



Obrázek 2.7: Absolutní a relativní rozdíl funkce rekonstruované pomocí standardní transformační matice (g_R) a funkce rekonstruované pomocí vylepšené transformační matice (g_{RU}).

Z obrázků 2.6 a 2.7 ovšem plyne, že vylepšená matice nemá v případě užití MFR na tomografickou rekonstrukci výrazný vliv, neboť relativní odchylka rekonstruované funkce při vylepšené transformační matici od rekonstruované funkce při standardní transformační matici

se pohybuje kolem 1% až 2% (kromě hodnot na okrajích, kde rekonstruované funkce klesají k nule a kde lze tedy větší relativní chybu očekávat, viz obr 2.7 vpravo). Přednost vylepšené transformační matice zřejmě ale spočívá v tom, že lépe vystihuje skutečné vlastnosti detektorů. Tomografická rekonstrukce u obrázku 2.6 totiž probíhala tak, že se nejprve z modelové funkce vypočetl stav detektorů pomocí standardní transformační matice a následně proběhla pomocí standardní transformační matice tomografická rekonstrukce. Obdobně probíhala tomografická rekonstrukce zobrazená na obrázku 2.7 pro vylepšenou transformační matici. Skutečnost je v případě tomografické rekonstrukce přes standardní matici spíše blíže modelové situaci, kdy výpočet hodnot v detektorech probíhá podle vylepšené transformační matice a následná rekonstrukce podle standardní transformační matice. Užitečným porovnáním by tedy mohlo být srovnání tomografické rekonstrukce přes standardní a vylepšenou transformační matici z takových hodnot v detektorech, které by byly v obou případech vypočteny z vylepšené transformační matice, jak ukazuje obrázek 2.8.



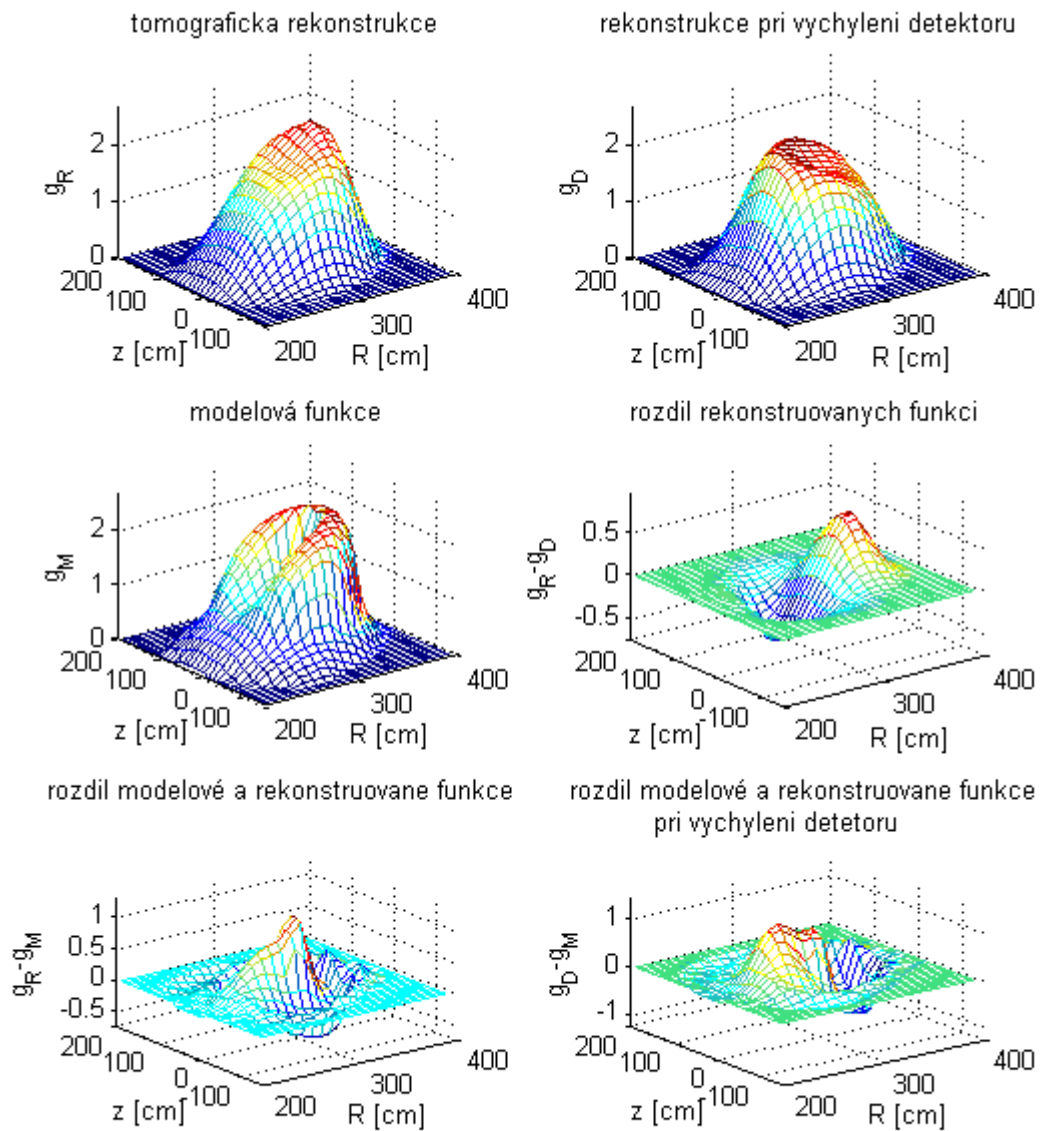
Obrázek 2.8: Srovnání tomografické rekonstrukce modelové funkce přes standardní (g_{US}) a vylepšenou transformační matici (g_{UU}) z hodnot v detektorech, které by byly v obou případech vypočteny z vylepšené transformační matice pro 10. časový krok (viz vztahy (2.12) a (2.13)).

I na obrázku 2.8 však není znatelný výrazný rozdíl mezi těmito rekonstrukcemi. Jejich vzájemná relativní odchylka je kolem 1% až 2%. Zdá se tedy, že vylepšená transformační matice nemá v tomto případě na tomografickou rekonstrukci metodou MFR výrazný vliv.

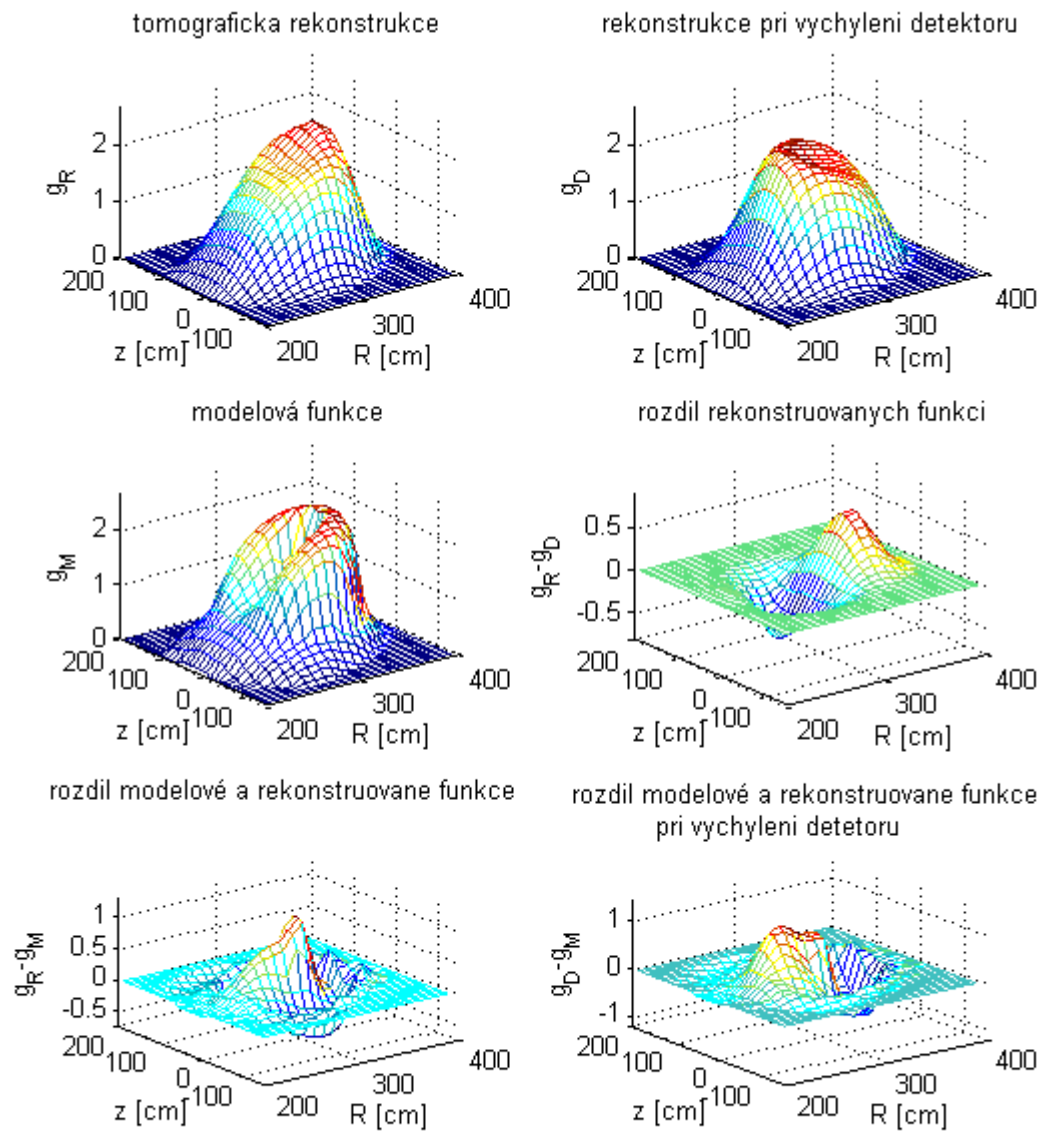
2.3.3. Vychýlení detektoru

Jednou z možných systematických chyb, která se může při tomografické rekonstrukci vyskytnout je vychýlení skutečné polohy detektoru oproti předpokládané. Tomografická rekonstrukce pak vlastně probíhá přes špatnou transformační matici, která neodpovídá skutečnosti, a vznikají chyby v rekonstrukci funkce, které jsou závislé především na tvaru funkce, jak lze vidět na obrázcích 2.9 až 2.11. Dále je z obrázků 2.9 až 2.11 patrné, že už při relativně malém vychýlení detektoru (např. $0,05^\circ$) vzniká v rekonstrukci s vychýleným detektorem celkem velká odchylka od původní rekonstrukce. Podrobný rozbor více možných výchylek pro jednotlivé detektory přesahuje rámec této práce. Lze ale zhruba říci, že v případech na obrázcích 2.9 až 2.11 nabývala střední absolutní odchylka (pro nenulové hodnoty) rekonstrukce s vychýleným detektorem od modelové funkce zhruba stejných hodnot jako v případě bez vychýlení detektoru - tj. něco nad 20% z průměru nenulových hodnot modelové funkce. Relativní odchylka rekonstrukce s vychýleným detektorem od modelové funkce (pro nenulové hodnoty) byla ovšem větší - kolem 35 až 40% oproti 30% v případě bez vychýlení detektoru. Nejvíce se pak vychýlení detektoru projevilo na poměru maximální výchylky k maximální hodnotě modelové funkce - kolem 55% oproti dříve zmíněným 27%. Vychýlení detektoru způsobilo především deformaci rekonstruované funkce, jak lze vidět na obrázcích 2.9 až 2.11.

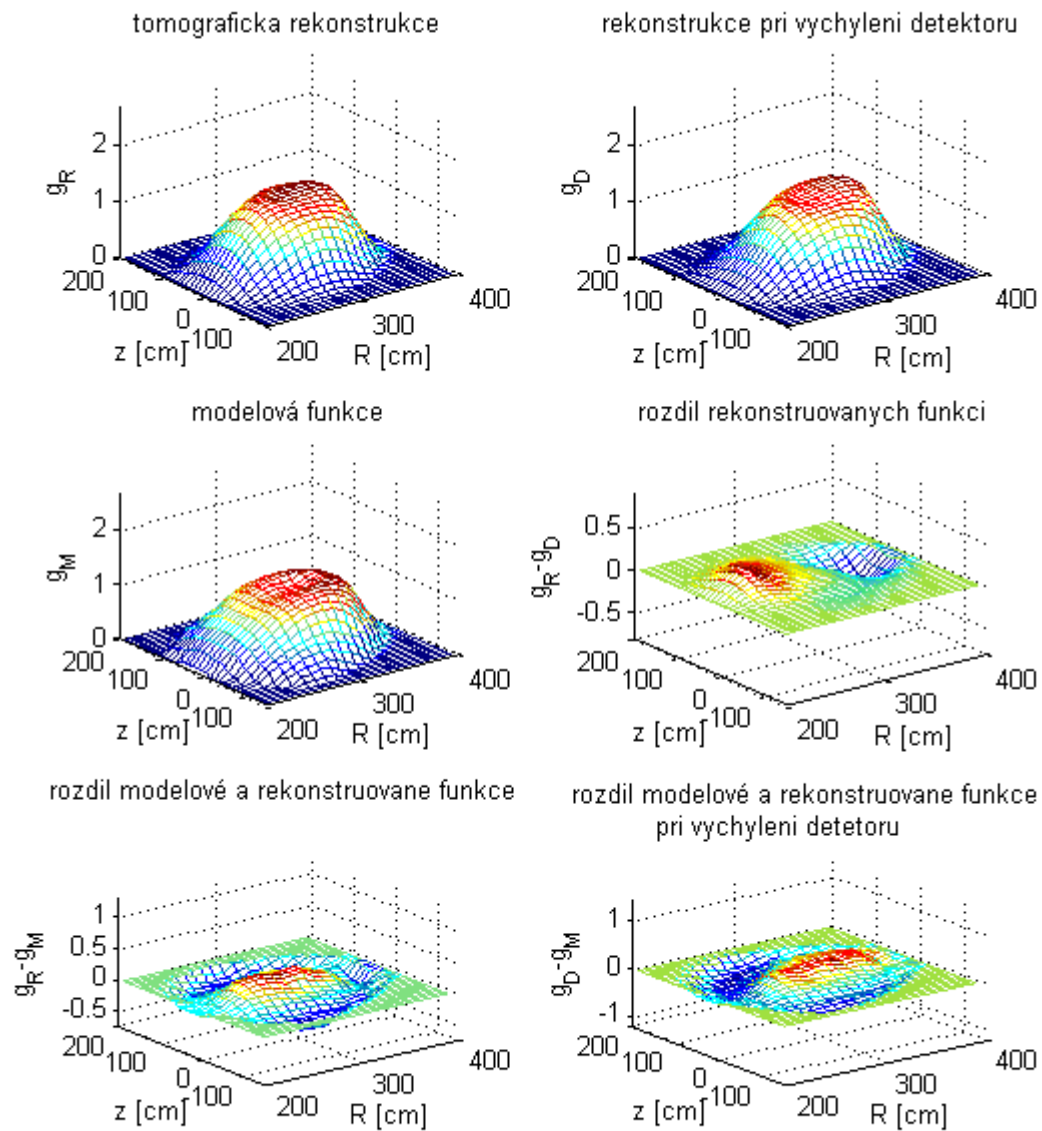
Vychýlení detektoru bylo aproximováno pootočením přímky pohledu detektoru kolem bodu, ve kterém se zhruba přímky pohledů jednotlivých detektorů (z horizontální nebo vertikální kamery) střetávají. Následně byla z těchto přímek určena nová transformační matice, podle které se z modelové funkce vypočetly data v detektorech. Tomografická rekonstrukce pak proběhla podle standardní transformační matice.



Obrázek 2.9: Chyby v tomografické rekonstrukci modelové funkce (2.12) v 8. časovém kroku (viz vztahy (2.12) a (2.13)) po vychýlení 5. detektoru (5. detektoru odshora měřícího v horizontálním směru) o 1° nahoru (g_D značí rekonstrukci s vychýleným detektorem).



Obrázek 2.10: Chyby v tomografické rekonstrukci modelové funkce (2.12) v 8. časovém kroku (viz vztahy (2.12) a (2.13)) po vychýlení 15. detektoru (prostředního detektoru měřícího ve vertikálním směru) o $0,05^\circ$ doprava (g_D značí rekonstrukci s vychýleným detektorem).



Obrázek 2.11: Chyby v tomografické rekonstrukci modelové funkce (2.12) ve 2. časovém kroku (viz vztahy (2.12) a (2.13)) po vychýlení 15. detektoru (prostředního detektoru měřícího ve vertikálním směru) o $0,05^\circ$ doprava (g_D značí rekonstrukci s vychýleným detektorem).

3. Metoda Monte Carlo

3.1. Úvod

Metody Monte Carlo se často používají tam, kde je nemožné nebo těžko proveditelné nalézt řešení deterministickým algoritmem. Jedná se o třídu výpočetních algoritmů, které využívají náhodná čísla k simulaci fyzikálních nebo matematických systémů. Hledá se např. průměr nebo rozptyl fyzikální veličiny, která je výsledkem náhodného děje se známým rozdělením.

Řešení metodou Monte Carlo lze rozdělit do tří kroků:

- 1) Návrh počítačového modelu zkoumaného systému.
- 2) Generování příslušných náhodných veličin a jejich zpracování.
- 3) Statistická analýza výsledků.

Chyba metody Monte Carlo je úměrná $1/\sqrt{n}$, kde n je počet generací náhodné veličiny a proto je obvykle třeba větší počet vygenerovaných veličin.

3.2. Generátor pseudonáhodných čísel

Generátor pseudonáhodných čísel generuje čísla taková, která jsou sice vypočtena deterministickým algoritmem, ale běžnými statistickými testy nerozeznatelná od náhodných. Při řešení problému metodou Monte Carlo je lze proto použít stejně dobře jako čísla náhodná. Obvykle se pseudonáhodné číslo počítá tak, že se z posledního nebo z několika posledních prvků posloupnosti čísel vypočte další prvek. Počáteční čísla posloupnosti tzv. random seed bývají náhodná čísla, učená např. ze systémového času. Vygenerovaná čísla mají zpravidla rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení (na intervalu reálných čísel $\langle 0,1 \rangle$ nebo na intervalu celých kladných čísel od nuly až po určité maximum) a případně jsou podle potřeby přetransformována do jiného rozdělení vhodným algoritmem.

V důsledku determinističnosti se na počítačích s omezenou pamětí začnou vygenerovaná pseudonáhodná čísla po uběhnutí periody generátoru opakovat. Perioda generátoru bývá ovšem velmi velká a při řešení běžných problémů se neprojeví. Výhodou generátoru pseudonáhodných čísel je možnost zopakovat vygenerovaná čísla v případě stejného random seed. Metoda Monte Carlo pak u daného problému dá stejné výsledky, což lze využít např. při ladění složitějších modelů realizovaných např. technikou paralelních procesů.

3.3. Simulace šumu v detektorech neutronů pro tomografickou rekonstrukci emisivity neutronů metodou MFR na tokamaku JET

Pod pojmem šum se často označuje nežádoucí znečištění např. zvuku nebo elektronického signálu v elektronice. Detektory neutronů v tokamaku vykazují šum způsobený např. neutrony odraženými od stěn tokamaku, falešnými záblesky na scintilátoru a šumem fotonásobiče, který je důsledkem náhodných elektronů dopadajících na anodu fotonásobiče. Není možné zbavit se šumu v detektorech úplně nebo jej z naměřených hodnot odstranit. Je ale možné metodou Monte Carlo předpokládaný šum simulovat a sledovat jeho vliv na rekonstrukci emisivity neutronů metodou MFR.

Šum v detektorech je zde podle předpokladů aproximován normálním (Gaussovým) pravděpodobnostním rozdělením se směrodatnou odchylkou 4% od naměřené hodnoty. Výsledná hodnota $\tilde{f}_i$ v i-tém detektoru je tedy dána vztahem:

$\tilde{f}_i = f_i + \xi_i = f_i(1 + x\tilde{\sigma})$, kde f_i je původně zjištěná hodnota na i-tém detektoru, ξ_i vygenerovaný šum, x hodnota vygenerovaná se standardním pravděpodobnostním rozdělením s hustotou pravděpodobnosti: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ a $\tilde{\sigma} = 0,04$ představuje podíl směrodatné odchylky generovaného šumu na hodnotě detektoru f_i .

Obrázky 3.1 až 3.4 zobrazují výsledky statistického zpracování modelovaného šumu v případě tomografické rekonstrukce:

- a) skutečných dat při standardní transformační matici (viz obr. 3.1).
- b) skutečných dat při vylepšené transformační matici (viz obr. 3.2).
- c) modelových dat při standardní transformační matici (viz obr. 3.3).
- d) modelových dat při vylepšené transformační matici (viz obr. 3.4).

poznámka:

V celé kapitole platí následující značení:

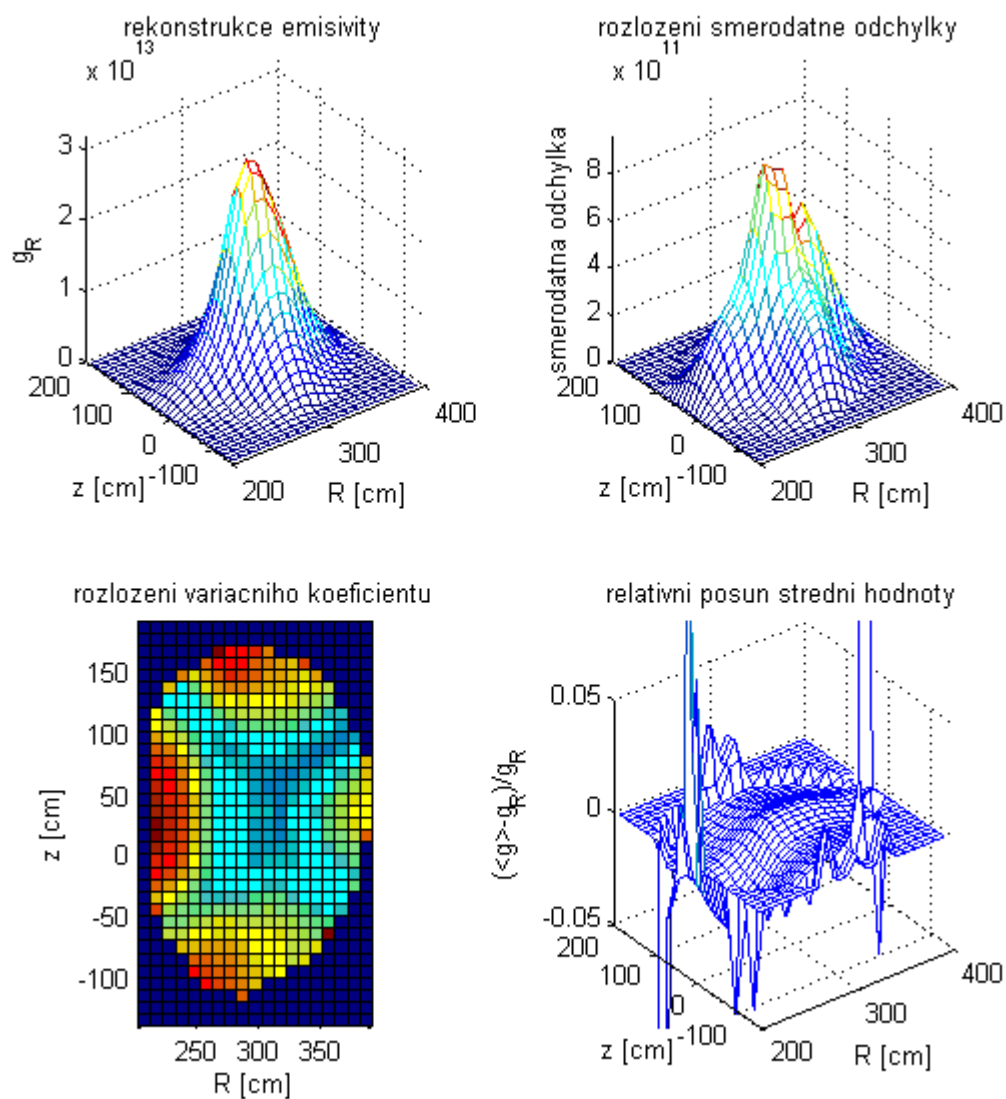
- z pro vzdálenost od roviny v níž leží vedlejší osa plazmatu (souřadnice výšky),
- R pro vzdálenost od hlavní osy tokamaku,
- g_R pro tomografickou rekonstrukci příslušné funkce,
- g_M pro modelovou funkci.
- $\langle g \rangle$ pro průměrné hodnoty pixelů po tomografické rekonstrukci s šumem.

Tomografické rekonstrukce proběhly pomocí MFR se shlazováním podle magnetických siločar (tj. podle vztahu (2.7)) s parametrem $\eta = 0,14$ pro modelová data a $\eta = 0,37$ pro skutečná data.

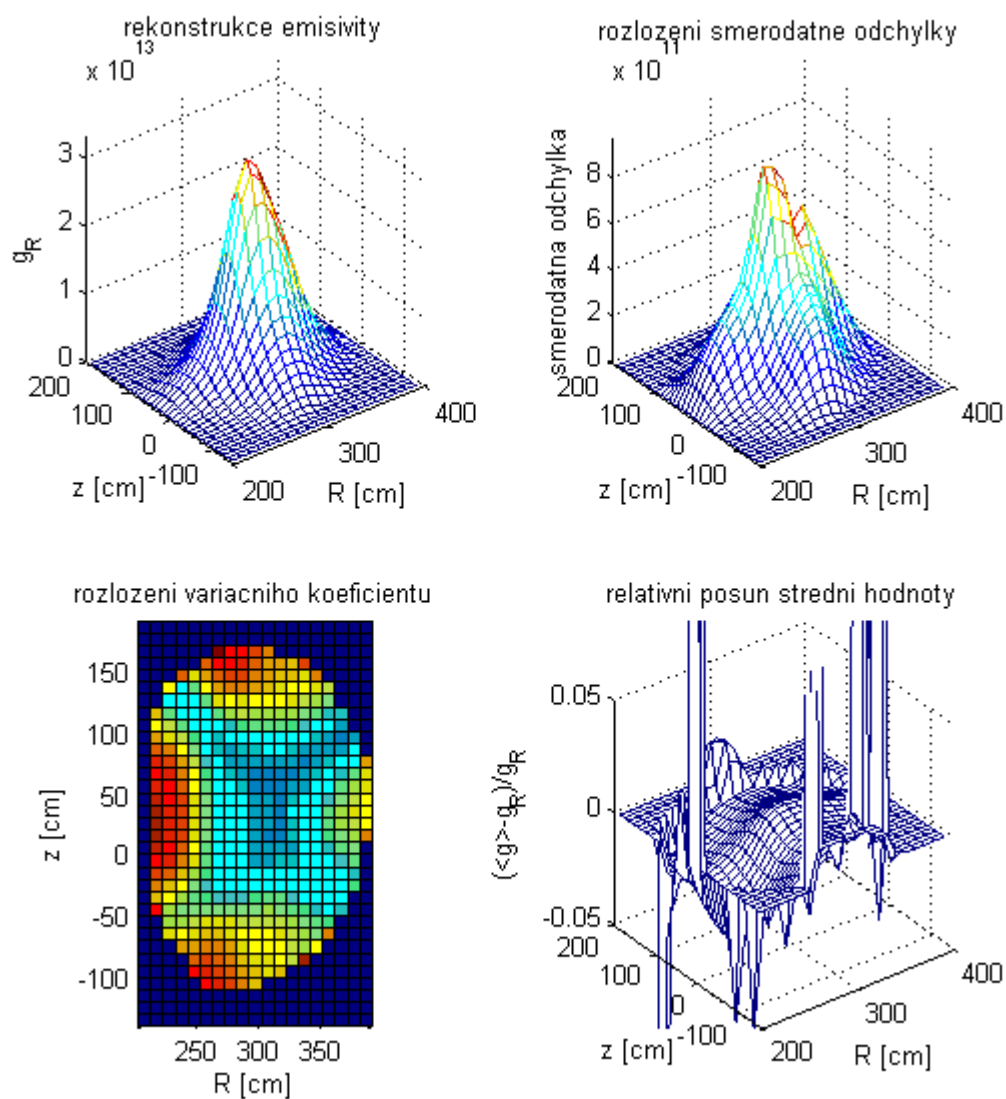
Skutečná data naměřených neutronů pocházejí z pulzu č. 61161 anglického tokamaku JET. Modelová data pocházejí z rovnice modelové funkce (2.12) s parametry učené vztahy (2.13).

V případě skutečných dat nebyl aktivní jedenáctý detektor (první vertikální detektor zprava).

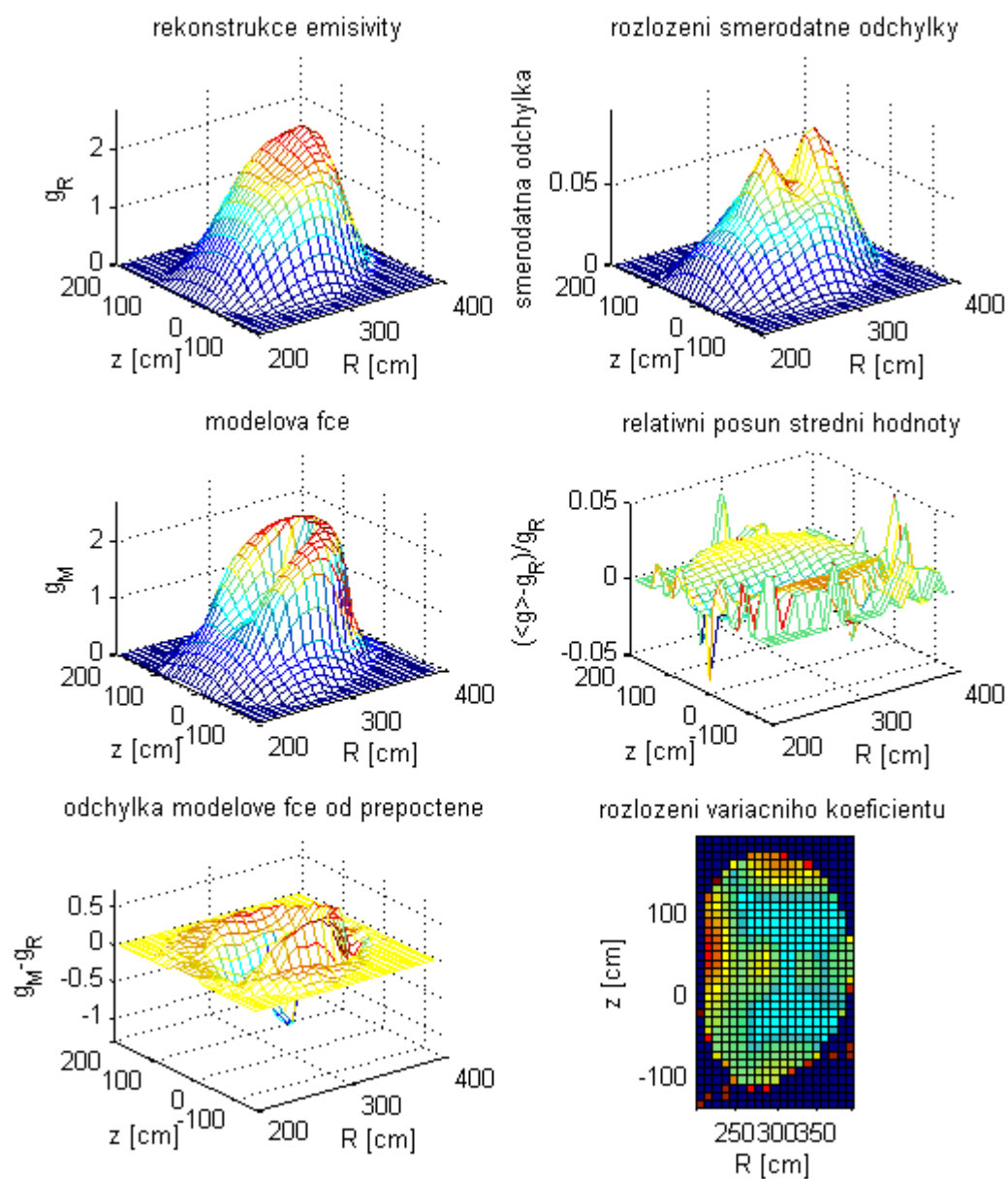
Hodnoty variačního koeficientu větší než 0,1 byly pro přehlednost vynulovány. Vyskytují se výhradně na okrajích modelové funkce, kde lze vysoké hodnoty variačního koeficientu očekávat.



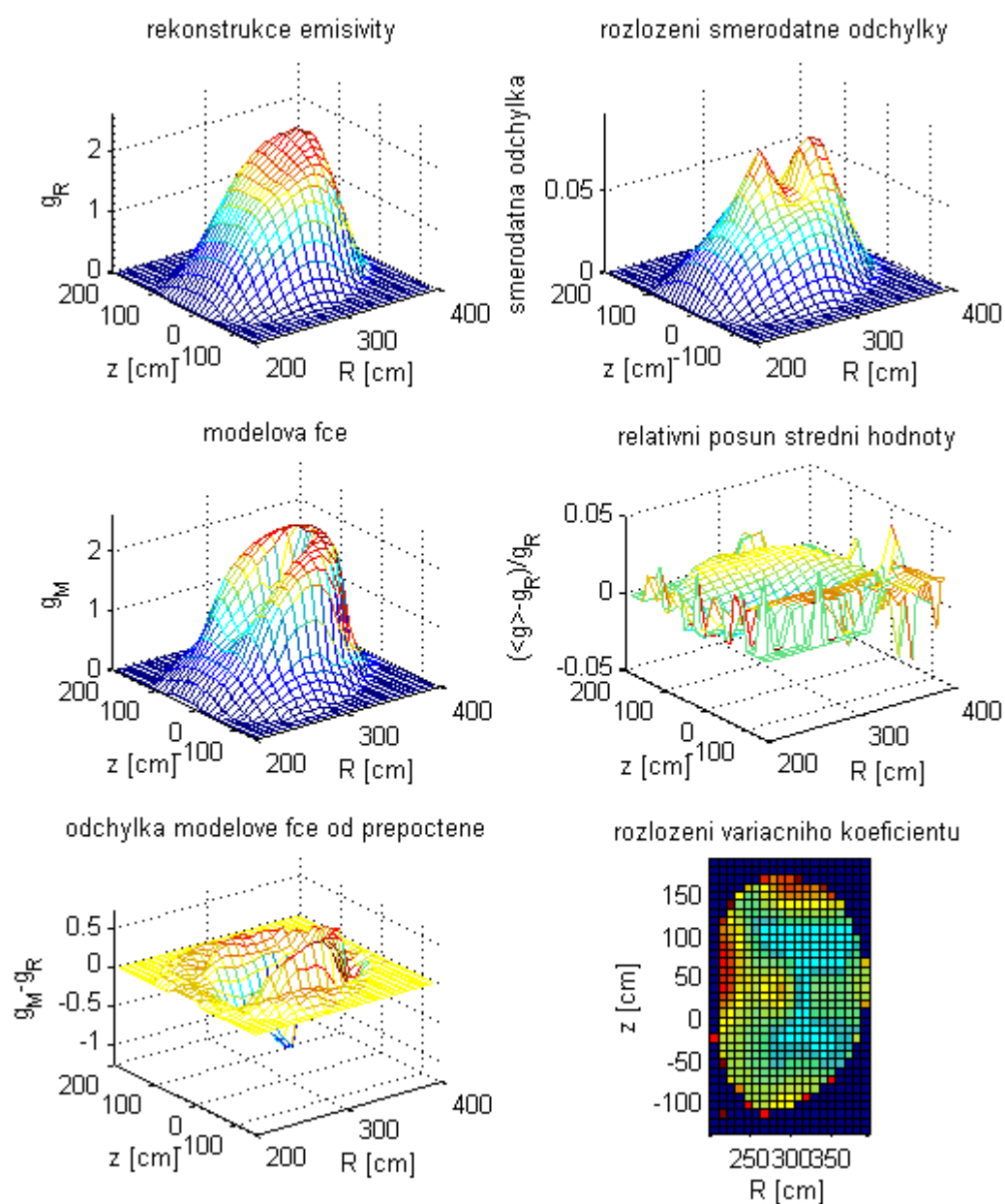
Obrázek 3.1 Tomografická rekonstrukce emisivity neutronů při standardní transformační matici na tokamaku JET 11s od zážehu plazmatu a vliv 2560x generovaného šumu.



Obrázek 3.2 Tomografická rekonstrukce emisivity neutronů při vylepšené transformační matici na tokamaku JET 11s od zážehu plazmatu a vliv 2560x generovaného šumu.



Obrázek 3.3 Tomografická rekonstrukce při standardní transformační matici modelové funkce (viz 2.12) v 8. časovém kroku a vliv 4000x generovaného šumu.



Obrázek 3.4 Tomografická rekonstrukce při vylepšené transformační matici modelové funkce (viz 2.12) v 8. časovém kroku a vliv 4000x generovaného šumu.

3.3.1. Relativní posun střední hodnoty pixelu od původní hodnoty

Z obrázků 3.1 až 3.4 je zřejmé, že střední hodnoty pixelů vzniklé tomografickou rekonstrukcí s šumem jsou téměř shodné s původními hodnotami pixelů bez šumu. Relativní posun středních hodnot pixelů od původních se pohybuje okolo 1% až 2%. Tvary funkcí reprezentujících relativní posun středních hodnot pixelů od původních se pro modelovou funkci a pro skutečnou emisivitu liší a možný malý vliv na relativní posun střední hodnoty tak může mít tvar rekonstruované funkce.

3.3.2. Výběrová směrodatná odchylka

Výběrová směrodatná odchylka vypovídá zhruba o tom, jak moc se od sebe čísla z vybraného souboru čísel liší. Je-li malá, čísla se od sebe příliš neliší a naopak. Výběrová směrodatná odchylka pro j -tý pixel je spočtena podle vzorce

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_k (g_{jk} - \langle g_j \rangle)^2}{N-1}}, \quad (3.1)$$

kde g_{jk} představuje hodnotu j -tého pixelu pro k -tý vygenerovaný šum, $\langle g_j \rangle$ je aritmetický průměr přes všechny hodnoty j -tého pixelu vzniklé šumem, tedy

$$\langle g_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_{jk} \quad (3.2)$$

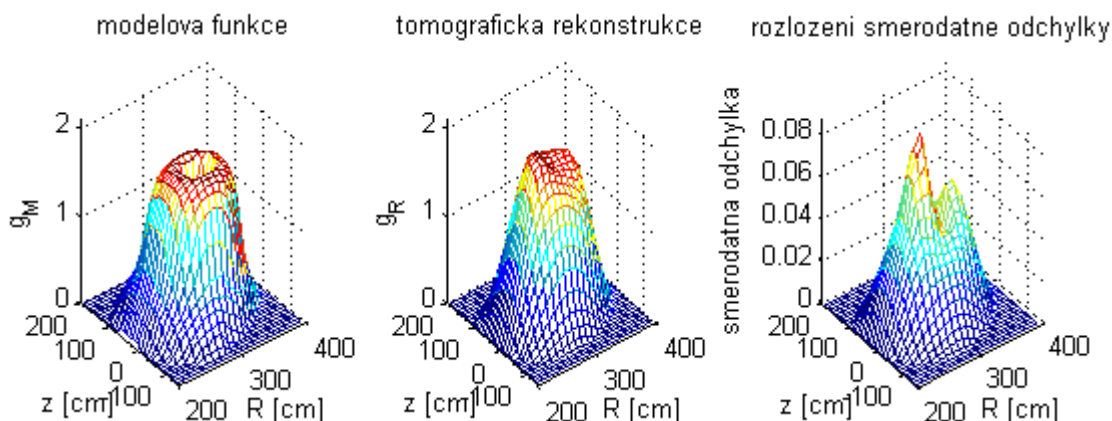
a N je počet vygenerovaných šumů.

V první řadě lze o směrodatné odchylce z obrázků 3.1 až 3.4 říci, že zhruba sleduje průběh zrekonstruované funkce. Takový průběh byl ovšem očekáván, protože šum vygenerovaný v detektorech byl úměrný hodnotám, které byly v detektorech zjištěny, a v důsledku byly pak více ovlivněny pixely s větší hodnotou.

U modelové funkce (tj. na obrázcích 3.3 a 3.4) jsou dále znatelné dva píky, které plně nekorrespondují s rekonstruovanou funkcí a lze tedy usoudit, že rekonstrukce funkcí podobného tvaru je v těchto místech více ovlivněna šumem generovaným v detektorech. Jedná se o pixely přibližně na souřadnicích (280cm, 30cm) a (330cm, 30cm). V případě funkce rekonstruované ze skutečných dat nejsou už takové dva píky tolik zřetelné. Objevují se ale i u jiných modelových funkcí jako je např. funkce (viz obr 3.5)

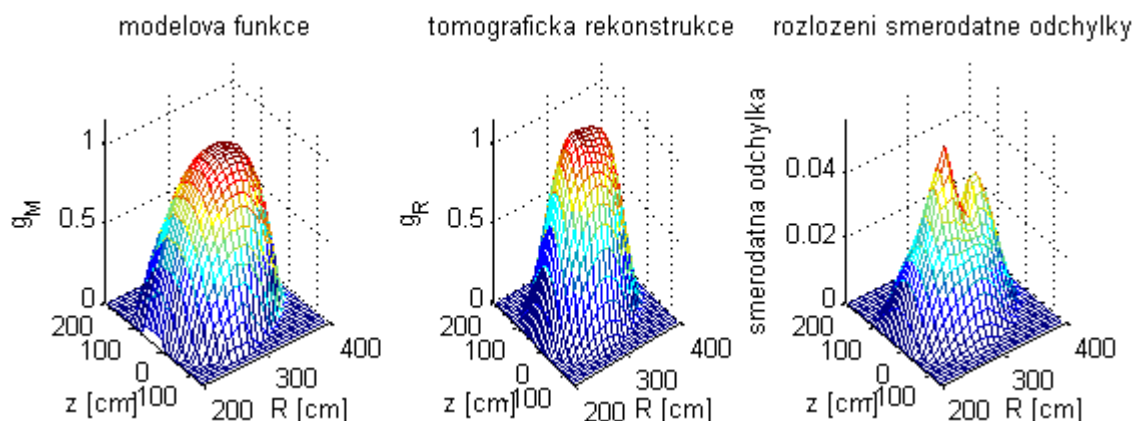
$$g(r, R(r)) = 1 - r^b + a(1 + \cos(\pi R^m)),$$

která je konstruována obdobně jako funkce (2.12) s odpovídajícími parametry (2.13).



Obrázek 3.5: Modelová funkce, tomografická rekonstrukce a rozložení směrodatné odchylky pro 500x generovaný šum.

Druhým příkladem je část modelové funkce (2.12): $g(r) = 1 - r^b$, která je rovněž konstruována obdobně jako funkce (2.12) se stejným parametrem b (viz obr 3.6).



Obrázek 3.6: Modelová funkce, tomografická rekonstrukce a rozložení směrodatné odchylky pro 500x generovaný šum.

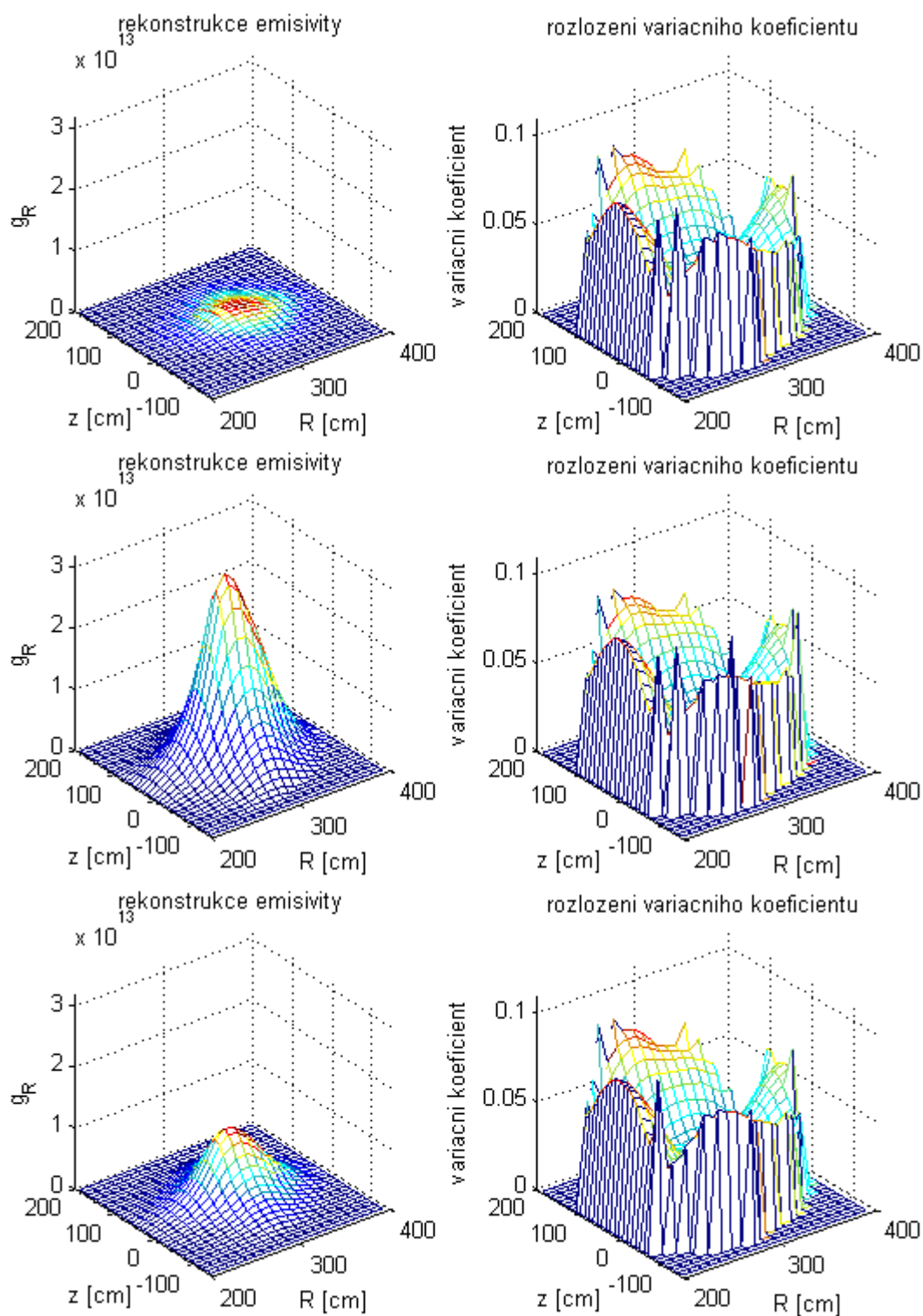
3.3.3. Variační koeficient

Variační koeficient je podílem směrodatné odchylky a aritmetického průměru:

$$v_j = \frac{s_j}{\langle g_j \rangle}.$$

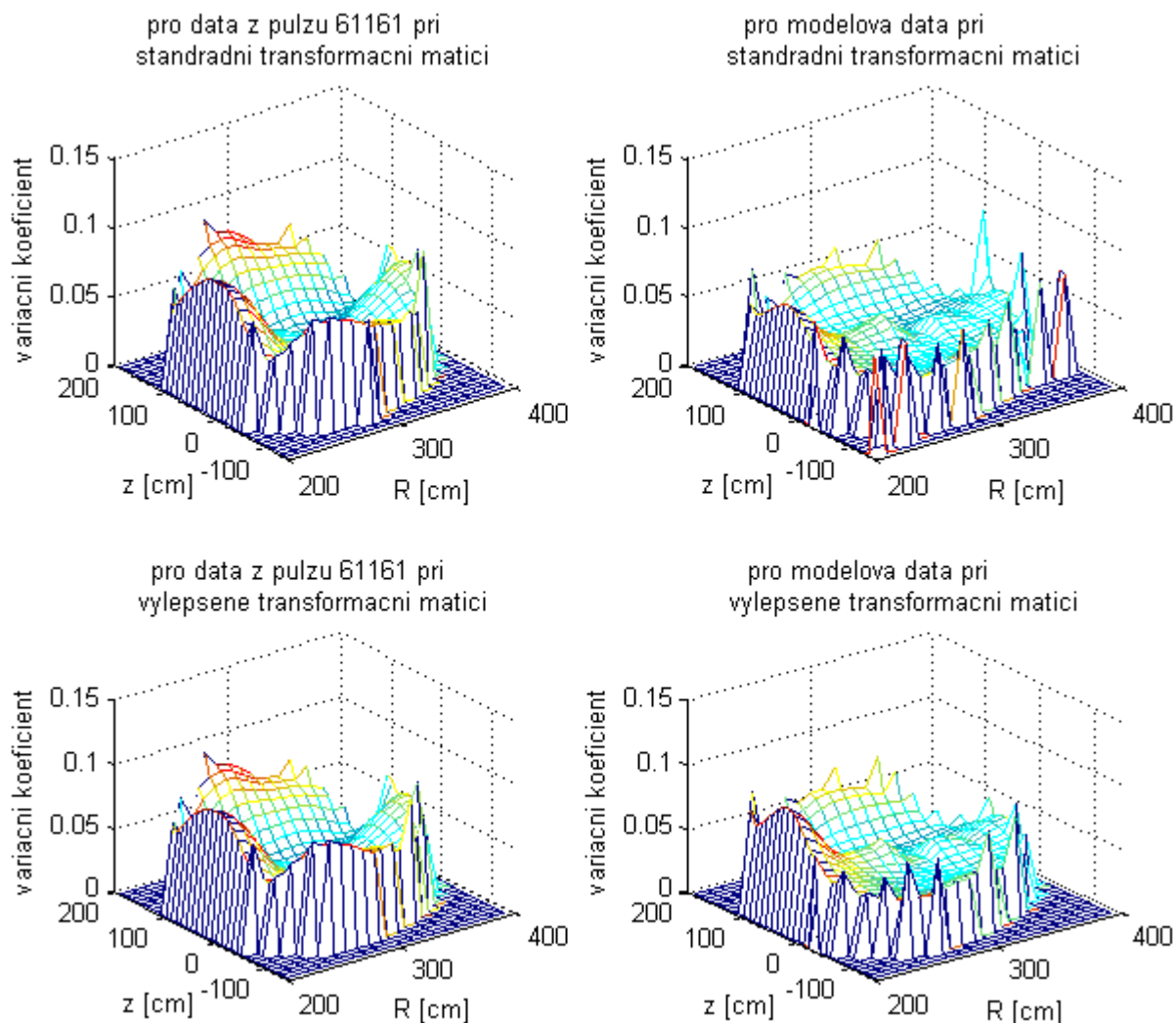
Z obrázků 3.1 až 3.4 lze vysledovat, že variační koeficient je největší především na okrajích, kde rekonstruovaná funkce klesá k nule. Zároveň je na okrajích větší spíše v místech, kam směřují detektory. Jedním z možných vysvětlení by mohlo být to, že šum generovaný v detektorech při následné tomografické rekonstrukci nejvíce ovlivnil ty pixely, které leží v zorných polích detektorů. Uprostřed tomografického obrazu, kde se střetávají detektory z horizontálních kamer s vertikálními je variační koeficient malý, což by mohlo být způsobeno částečným vzájemným vyrušením vlivu šumu v detektorech (neboť střední hodnota šumu je rovna nule).

Další vlastností vypočteného variačního koeficientu je, že se příliš nemění s časem (viz obr 3.7) a vývoj rekonstruované emisivity neutronů pro skutečná i modelová data jej tedy příliš neovlivnil.



Obrázek 3.7 Rekonstrukce emisivity neutronů pulzu č. 61161 na tokamaku JET při standardní transformační matici a rozložení variačního koeficientu v časech 10,57s (nahore), 10,87s (uprostřed) a 11,47s (dole) od zážehu plazmatu.

Šum byl vygenerován s normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou 4% od skutečné hodnoty v detektoru, která zároveň představuje střední hodnotu generovaného šumu a proto je variační koeficient generovaného šumu v detektorech $v_D = 0,04$. Z obrázků 3.7 i 3.8 je patrné, že hodnoty variačních koeficientů jednotlivých pixelů se řádově přibližně shodují s v_D . Na okrajích dosahuje přitom variační koeficient hodnot 0,1 i více¹ a uprostřed klesá k hodnotám kolem 0,03.



Obrázek 3.8: Variační koeficienty pro skutečná i modelová data v případě užití standardní a vylepšené transformační matice. Šum byl vygenerován 2560x pro skutečná data a 4000x pro modelová data. Skutečná data byla brána 11s po zážehu plazmatu, modelová z modelové funkce (viz 2.12) v desátém časovém kroku (viz 2.13).

3.3.4. Pravděpodobnostní rozdělení hodnot jednotlivých pixelů

Z obrázků 3.9 a 3.10 je patrné, že důsledkem šumu v detektorech s normálním rozdělením je také normální rozdělení hodnot jednotlivých pixelů. V případě obrázku 3.9 byly hodnoty vybraného pixelu rozděleny do padesáti intervalů (od minimální až po maximální hodnotu) a následně určena četnost hodnot spadajících pod jednotlivé intervaly pro

¹ Pro velmi nízké hodnoty rekonstruované funkce se může objevit velká hodnota variačního koeficientu řádově v desítkách.

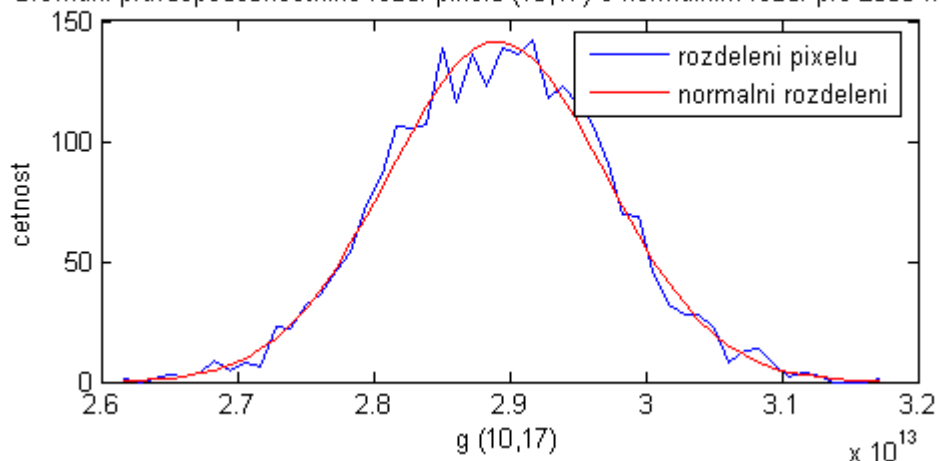
předpokládané normální rozdělení (na obr. 3.9 červeně) a pro rozdělení hodnot vybraného pixelu (na obr. 3.9 modře). Parametry předpokládaného normálního rozdělení pro vybraný pixel byly vypočteny ze vztahů (3.1) a (3.2).

Směrodatná odchylka rozdělení hodnot pixelu od normálního rozdělení udává vzájemnou odlišnost obou rozdělení a obrázek 3.9 nasvědčuje tomu, že pro vybraný pixel klesá k nule. Výpočet této odchylky proběhl podle vzorce:

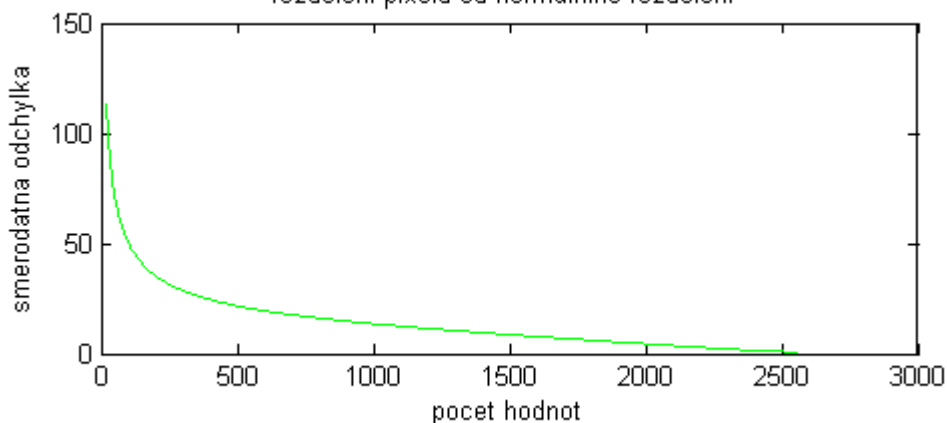
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (n_{Norm}(g_k) - n(g_k))^2}{N}}, \text{ kde } g_k \text{ je hodnota daného pixelu reprezentující k-tý interval}$$

(hodnota ve středu k-tého intervalu), $n_{Norm}(g_k)$ je předpokládaná četnost hodnot daného pixelu v k-tém intervalu v případě normálního rozdělení, $n(g_k)$ je počet hodnot daného pixelu nalezených v k-tém intervalu a N je celkový počet hodnot pixelu (z N generací šumu).

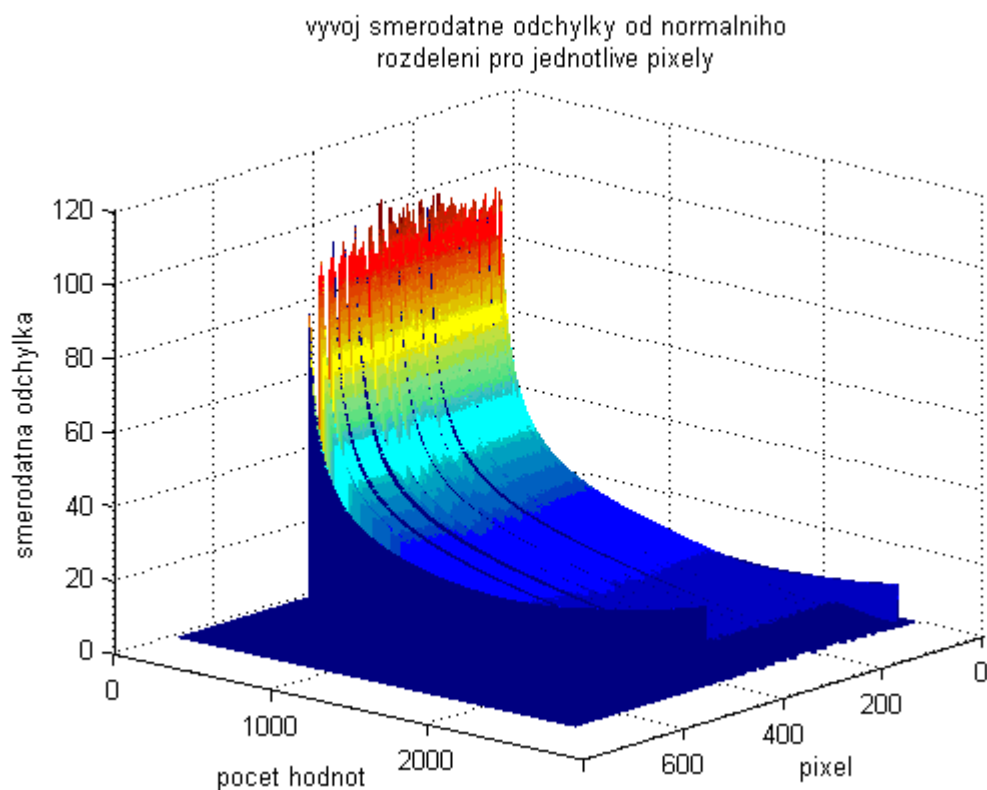
Srovnání pravděpodobnostního rozd. pixelu (10,17) s normálním rozd. pro 2560 hodnot



Vývoj smerodatne odchylky pravděpodobnostního rozdělení pixelu od normálního rozdělení

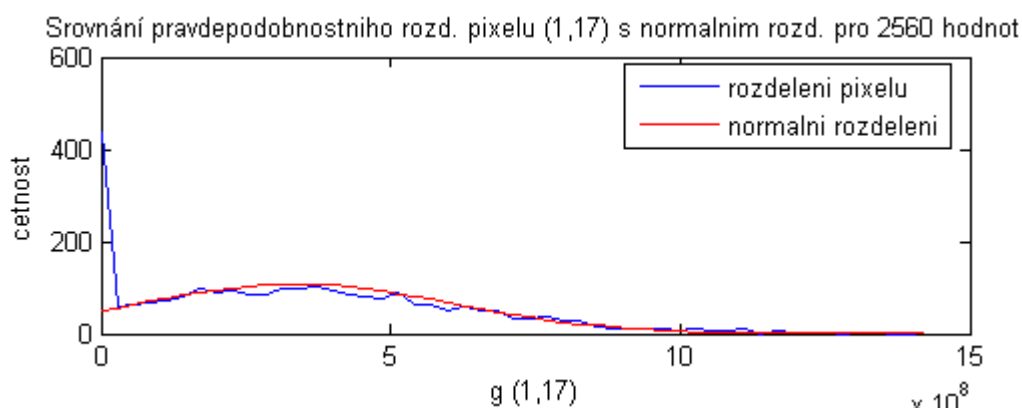


Obrázek 3.9 Rozdělení hodnot pro pixel na souřadnicích R=292,2cm a z=20cm (tj. pixel desátý zleva a sedmnáctý odspoda) a vývoj směrodatné odchylky rozdělení hodnot pixelu od předpokládaného normálního rozdělení. Šum byl generován ke skutečným datům z pulzu č. 61161 v čase 11s od zážehu plazmatu. Tomografická rekonstrukce probíhala při standardní matici.



Obrázek 3.10 Vývoj směrodatné odchylky rozdělení hodnot pro všechny pixely od normálního rozdělení. Šum byl generován ke skutečným datům z pulzu č. 61161 11s od zážehu plazmatu. Tomografická rekonstrukce probíhala při standardní matici.

Obrázek 3.10 potvrzuje, že směrodatná odchylka rozdělení hodnot pixelu od normálního rozdělení klesá pro všechny pixely až na několik výjimek. Jedná se o pixely s hodnotami rekonstruované funkce blízkými nule. Šum generovaný v detektorech může pak při tomografické rekonstrukci vést k tomu, že se na těchto pixelech objeví záporná hodnota, která ovšem neodpovídá skutečnosti a proto se pak pokládá rovna nule (viz obr. 3.11).



Obrázek 3.11 Rozdělení hodnot pro pixel na souřadnicích $R=202,2\text{cm}$ a $z=20\text{cm}$ (tj. pixel první zleva a sedmá odspoda). Šum byl generován ke skutečným datům z pulzu č. 61161 11s od zážehu plazmatu. Tomografická rekonstrukce probíhala při standardní matici.

4. Diskuse

Výsledky statistického zpracování vlivu šumu v detektorech na tomografickou rekonstrukci a chyby tomografické rekonstrukce zkoumané ve druhé kapitole závisejí na volbě parametrů, jako je např. parametr určující vzájemnou váhu mezi shlazováním podél a napříč magnetických siločar (parametr η , viz vztah (2.7)), předpokládaná chyba dat v i -tém detektoru (σ_i), směrodatná odchylka generovaného gaussovského šumu nebo také na tvarech rekonstruovaných funkcí. Zkoumání vlivu jednotlivých parametrů na chyby v tomografické rekonstrukci ovšem přesahuje rámec této práce.

Dále je třeba zdůraznit, že v případě generování gaussovského šumu v detektorech jde spíše o sledování vlivu gaussovského šumu na Tichonovu regularizaci vymezenou minimem Fisherovy informace než o simulaci skutečnosti. Gaussovský šum je jen aproximací skutečného šumu a např. pro nízké hodnoty signálů v detektorech vzniká velká statistická chyba, kterou je lepší simulovat Poissonovým rozdělením. Šum mohou také vykazovat jednotlivé pixely, neboť je do určité míry náhoda, kterým směrem neutron po fúzní reakci z prostoru pixelu vyletí.

Chyby v tomografické rekonstrukci emisivity neutronů mohou být dále také způsobeny např. rozdílnou citlivostí detektoru neboli chybou relativní kalibrace, časově proměnou citlivostí detektorů (napětí na fotonásobičích i jejich pozice nemusí být neměnné), vychýlením detektoru nejen ve svislé rovině ale i ve vodorovné apod.

5. Závěr

Práce se zabývá transformací chyb v tomografii emisivity fúzních neutronů tak, jak probíhá na anglickém tokamaku JET. Ve všech případech tomografické rekonstrukce byla užita Tichonova regularizace vymezená minimem Fisherovy informace, která je popsána v druhé kapitole. První kapitola obsahuje základní poznatky o tokamaku, který patří v současné době mezi nejnadějnější zařízení pro budoucí možné energetické využití termojaderné fúze.

Druhá kapitola dále nabízí porovnání modelové funkce a její tomografické rekonstrukce, srovnání standardní tomografické rekonstrukce a tomografické rekonstrukce s přihlédnutím k rozbíhavosti zorných polí detektorů a nakonec odhad chyb při vychýlení detektoru.

Porovnání modelové funkce a její tomografické rekonstrukce nasvědčuje v souladu s očekáváním tomu, že tomografická rekonstrukce hůře sleduje ostřejší změny modelové funkce a výsledná rekonstrukce je tak hladší než původní funkce. Průměrná absolutní odchylka všech nenulových hodnot rekonstruované funkce od modelové odpovídala v tomto případě přibližně 20% z průměru všech nenulových hodnot modelové funkce. Průměrná relativní odchylka nenulových hodnot rekonstruované funkce od modelové vyšla procentuálně o něco vyšší - 30%, což je pravděpodobně způsobeno tím, že relativní odchylka bývá větší u menších hodnot modelové funkce.

Ze srovnání tomografické rekonstrukce modelové funkce pro standardní transformační matici, která zanedbává rozbíhavost zorných polí detektorů a tomografické rekonstrukce pro vylepšenou transformační matici, která zahrnuje rozbíhavost zorných polí detektorů vyplynulo, že vylepšená transformační matice má v tomto případě na tomografickou rekonstrukci zanedbatelný vliv, neboť vzájemná relativní odchylka obou rekonstrukcí se pohybovala kolem 1% až 2%.

Už při relativně malých výchylnkách detektorů (např. $0,05^\circ$) docházelo k celkem velké deformaci rekonstruované funkce. Zejména vzrostla relativní odchylka nenulových hodnot rekonstruované funkce od modelové na hodnotu až kolem 40% a maximální absolutní odchylka, která vzrostla až dvojnásobně (např. na hodnotu kolem 55% z maxima modelové funkce).

Třetí kapitola se zabývá vlivem gaussovského šumu v detektorech na tomografickou rekonstrukci. Zkoumány jsou celkem čtyři případy: pro modelovou funkci a pro skutečná data jak při standardní, tak při vylepšené transformační matici. Šum byl generován 4000x pro modelová data a 2560x pro skutečná data.

V souladu s očekáváním se potvrdilo, že gaussovský šum v detektorech vede rovněž ke gaussovskému rozdělení hodnot jednotlivých pixelů.

Téměř také nedochází k relativnímu posunu středních hodnot pixelů oproti hodnotám, které byly rekonstruovány bez šumu. Velikost relativního posunu se pohybuje okolo 1% až 2% (kromě hodnot na okrajích rekonstruované funkce, kde funkce klesá k nule a kde lze velký relativní posun očekávat).

Velikost směrodatných odchylek jednotlivých pixelů zhruba sleduje průběh rekonstruované funkce, což zřejmě plyne ze skutečnosti, že velikost gaussovského šumu je úměrná hodnotě načtené detektorem (generovaný šum má směrodatnou odchylku o velikosti 4% z hodnoty načtené v detektoru) a více jsou tak směrodatnou odchylkou po rekonstrukci zatíženy pixely o vyšší hodnotě. Směrodatná odchylka dále vykazuje dva píky zhruba uprostřed tomografického obrazu, které plně nekorespondují s rekonstruovanou funkcí a objevují se i u dalších vybraných modelových funkcí. Je tedy možné, že v těchto místech je rekonstruovaná funkce ovlivněna gaussovským šumem v detektorech více.

Variační koeficient neboli podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru vyšel narozdíl od směrodatné odchylky nejmenší zhruba uprostřed tomografického obrazu, kde rekonstruovaná funkce nabývá nejvyšších hodnot. Možným vysvětlením by mohlo být to, že se uprostřed tomografického obrazu střetávají průhledy jednotlivých detektorů a vliv šumu generovaného v detektorech se pak může v těchto místech částečně vyrušit, neboť střední hodnota šumu je rovna nule. Variační koeficient je také velký na okrajích tomografického obrazu v místech, kam průhledy detektorů směřují. Lze tedy usoudit, že šum generovaný v detektorech nejvíce ovlivnil pixely, které leží v zorných polích detektorů kromě středu tomografického obrazu, kde se vliv šumu pravděpodobně částečně vyruší. Rozložení velikosti variačního koeficientu v jednotlivých pixelech se ve všech případech pro všechny časy příliš neliší a tvar i velikost rekonstruované funkce jej tedy příliš neovlivňuje. Hodnoty variačního koeficientu pixelů zhruba odpovídají variačnímu koeficientu generovaného šumu, který má hodnotu 0,04, neboť variační koeficient pixelů nabývá uprostřed tomografického obrazu hodnot kolem 0,03 a na okrajích roste k hodnotám kolem 0,1 i více.

Literatura:

- [1] G. McCracken, P. Stott, *Fúze, Energie Vesmíru*. Nakladatelství MF v edici Kolumbus, 2005
- [2] J. Wesson, *The Science of JET*, JET-R(99)13
(dostupné na <http://www.jet.efda.org/documents/books/wesson.pdf>)
- [3] J. Mlynář, *Úvod do termojaderné fúze* (přednášky FJFI CVUT, LS 2007)
- [4] J. Mlynář, *Focus On: JET*, The European Centre of Fusion Research, EFDA JET Report EFD-R(07)01, 2007
- [5] J. Mlynář: ITER: Cesta ke zvládnutí řízené termonukleární fúze, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 49 (2004) str. 129-150, (dostupné na <http://www.ipp.cas.cz/Tokamak/cz>)
- [6] P. Kulhánek, *Teoretická fyzika*, FEL CVUT, Praha, 2002 (skriptum - nepublikováno)
- [7] J. Mlynar, *Unfolding of the NE213 data at JET via Minimum Fisher Regularisation*, TFD Technical Meeting on Unfolding and Tomographic Techniques for Fusion Applications, 1st – 2nd July 2008, EFDA JET, Culham
- [8] J. Mlynar et al., *Upgrade of the Minimum Fisher Regularisation to Finite Width of Viewing Chords*, 23rd Symposium on Plasma Physics and Technology, June 2008, Prague, Czech Republic (poster)
- [9] http://server.ipp.cas.cz/~vwei/index_c.html
- [10] IPP *Summer University for Plasma Physics*, September 24 - September 28, 2007, Greifswald, Germany
- [11] G. Bonheure et al, *Neutron Diagnostics for Reactor Scale Fusion Experiments*, PoS(FNDA2006)091
- [12] J. Mlynar et al., *Abelisation of the Neutron Profile Data at JET using Minimum Fisher Regularisation*, 34th EPS Conference on Plasma Physics, (Warsaw, Poland 2nd - 6th July 2007)
- [13] M. Anton et al., *X-ray tomography on the TCV tokamak*, Plasma Phys. Control. Fusion 38 (1996) 1849-1878
- [14] O. N. Jarvis, J. M. Adams, F. B. Marcus, G J Sadler, *Neutron Profile Measurements in JET*, 7th Internal Toki Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion, Toki-city, Japan, 28 November - 1 December 1995
- [15] P. Kahánek, *Generátor náhodných čísel v Matlabu*, konference Technical Computing Prague 2005 (dostupné na http://phobos.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB05)
- [16] S. Racek, *Pravděpodobnostní modely počítačů*, Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň 2002, str. 57-73
- [17] J. Tesař, P. Bartoš, *Metoda Monte Carlo a programovací jazyk MATLAB při přípravě učitelů na pedagogických fakultách*, konference Technical Computing Prague 2006 (dostupné na http://phobos.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB06)
- [18] J. Mlynář, *Pixels Method Computer Tomography in Tokamak Experiments*, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, September 1995 (disertační práce)

Dodatek - základní programy v Matlabu

Program pro generaci šumu v detektorech s normálním rozdělením a následné uložení tomografické rekonstrukce do souboru

```
%Generator sumu s Gaussovým rozdělením
function [ ]=NoiseGen(model,upgr,N_add)

%vstup:
%model...0 - pro skutečná data, 1 - pro modelová data
%upgr...0 - standardní matice, 1 - vylepšená matice
%N_add...počet generovaných dat

%uložení tomografických rek. do souboru
%gMEM61161 pro skutečná data a standardní transformační matici
%gMEM61161U pro skutečná data a vylepšenou transformační matici
%gMEMmodel pro modelová data a standardní transformační matici
%gMEMmodelU pro modelová data a vylepšenou transformační matici

modelupgr=10*model+upgr;

%rozptyl rozdělení (procento z naměřené hodnoty v detektoru)
sigma=4/100;

%nahrání dat pro MFR:
%Y - hodnoty detektoru, dY - předpokládaná chyba, dets - aktivní detektory
%jetpulse - číslo pulsu, xmesh a ymesh - mřížka pixelu, Tij - transformační
%matice, tsel - časový vektor
switch modelupgr
    case 00
        load imdata61161
        load tmat20x34
    case 01
        load imdata61161
        load tmat20x34u
    case 10
        load imdataModel
        load tmat20x34
    case 11
        load imdataModelU
        load tmat20x34u
end

%případně nahrání dříve vygenerovaných dat (gpamet,Ypamet)
try
    clear gpamet Ypamet
    switch modelupgr
        case 00
            load gMEM61161
        case 01
            load gMEM61161U
        case 10
            load gMEMmodel
        case 11
            load gMEMmodelU
    end
    N=size(gpamet,1);
```

```

catch
    N=0;
end

%generovani sumu v detektorech a nasledna tomograficka rekonstrukce
for i=1+N:N_add+N
    disp(' ')
    disp([int2str(i) ' DATA'])
    disp(' ')
    Yi=Y.*(1+sigma*randn(size(Y)));
    Ypamet(i,:)=Yi;

    dY=1./sqrt(mean(Yi,1));
    dY=sigma.*dY/min(dY(find(abs(dY)==dY)));
    dY(find(real(dY)==0))=0.5;

    [gres,lam,chi2]=ntminfisher_gen(jetpulse,dets,Yi,dY,Tij,xmesh,ymesh,tset,danis,0);
    gpamet(i,:)=gres;
end

%ulozeni dat
switch modelupgr
    case 00
        save gMEM61161 gpamet Ypamet
    case 01
        save gMEM61161U gpamet Ypamet
    case 10
        save gMEMmodel gpamet Ypamet
    case 11
        save gMEMmodelU gpamet Ypamet
end

N=N+N_add

```

Program pro statistické zpracování vlivu šumu na tomografickou rekonstrukci

```

%statisticke zpracovani vlivu sumu na tomografickou rekonstrukci
function [vypis]=statistika(model,upgr)

%vstup:
%0 - pro skutecna data, 1 - pro modelova data
%0 - tmat20x34, 1 - tmat20x34u

%ulozeni vysledku:
%smerodatne odchylky
%prumeru
%relativniho posunu prumeru oproti puvodni hodnote bez sumu
%absolutniho posunu prumeru oproti puvodni hodnote bez sumu
%variacniho koeficientu
%celkoveho poctu (N) zpracovavanych hodnot jednotlivych pixelu v danem case
%do souboru:
%statistika61161 - pro skutecna data a standardni transformacni matici
%statistika61161U - pro skutecna data a vylepsenou transformacni matici
%statistikaModel - pro modelova data a standardni transformacni matici
%statistikaModelU - pro modelova data a vylepsenou transformacni matici

modelupgr=10*model+upgr;

%nahrani dat

```

```

switch modelupgr
case 00
    load gMEM61161 gpamet
    load g61161 gres
case 01
    load gMEM61161U gpamet
    load g61161u gres
case 10
    load gMEMmodel gpamet
    load gmodel0 gres gmodel
case 11
    load gMEMmodelU gpamet
    load gmodel0u gres gmodel
end

%rozmary
N=size(gpamet,1);
nxx=size(gpamet,3);
nyy=size(gpamet,2);
ntt=size(gpamet,4);

prumer=zeros(nyy,nxx,ntt);
suma=zeros(nyy,nxx,ntt);
smerodatna_odchylka=zeros(nyy,nxx,ntt);
posun=zeros(nyy,nxx,ntt);
variacni_koeficient=zeros(nyy,nxx,ntt);

%vypocet
for tt=1:ntt
    disp([int2str(tt) ' cas'])
    for xx=1:nxx
        for yy=1:nyy
            %aritmeticky prumer
            prumer(yy,xx,tt)=mean(gpamet(:,yy,xx,tt));

            %vypocet smerodatne odchylky
            for i=1:N suma(yy,xx,tt)=suma(yy,xx,tt)+(gpamet(i,yy,xx,tt)-prumer(yy,xx,tt))^2; end
            smerodatna_odchylka(yy,xx,tt)=((suma(yy,xx,tt))/(N-1))^(0.5);

            %relativni a absolutni posunuti prumeru oproti puvodni %hodnote
            if gres(yy,xx,tt)>0
                posun(yy,xx,tt)=(prumer(yy,xx,tt)-gres(yy,xx,tt))/gres(yy,xx,tt);
                absposun(yy,xx,tt)=prumer(yy,xx,tt)-gres(yy,xx,tt);
            end

            %variacni koeficient
            if prumer(yy,xx,tt)>0 variacni_koeficient(yy,xx,tt)=smerodatna_odchylka(yy,xx,tt)/prumer(yy,xx,tt);
        end
    end
end

%ulozeni vysledku
switch modelupgr
case 00
    save statistika61161 smerodatna_odchylka prumer posun absposun variacni_koeficient N
    vypis='data ulozena do souboru statistika61161';
case 01
    save statistika61161U smerodatna_odchylka prumer posun absposun variacni_koeficient N
    vypis='data ulozena do souboru statistika61161U';

```



```

case 10
    save statistikaModel smerodatna_odchylka prumer posun absposun variacni_koeficient N
    vypis='data ulozena do souboru statistikaModel';
case 11
    save statistikaModelU smerodatna_odchylka prumer posun absposun variacni_koeficient N
    vypis='data ulozena do souboru statistikaModelU';
end

```

Program pro porovnání rozdělení hodnot vybraného pixelu s normálním rozdělením

```

%porovnani rozdeleni daneho pixelu s normalnim rozdeleni
function []=pixel(model,upgr,xx,yy,tt)

%vstup
%0 - pro skutecna data, 1 - pro modelova data
%0 - tmat20x34, 1 - tmat20x34u
%souradnice pixelu:
% xx=1..20 - vodorovna pozice pixelu
% yy=1..34 - horizontalni pozice pixelu
% tt=1..10 pro model 1..21 pro skutecna data - casovy index

modelupgr=10*model+upgr;

%nahrani dat
clear gres gpamet Ypamet
switch modelupgr
    case 00
        load gMEM61161
        load g61161 gres
    case 01
        load gMEM61161U
        load g61161u gres
    case 10
        load gMEMmodel
        load gmodel0 gres
    case 11
        load gMEMmodelU
        load gmodel0u gres
end

N=size(gpamet,1); %pocet hodnot pixelu

%urceni minima, maxima
minimum=min(gpamet(:,yy,xx,tt));
maximum=max(gpamet(:,yy,xx,tt));

%parametry rozdeleni
delka=maximum-minimum;
pocet_intervalu=50;
rozliseni=delka/pocet_intervalu;
rozdeleni=zeros(pocet_intervalu+1,1);

%vypocet rozdeleni
for i=1:N
    index=round((gpamet(i,yy,xx,tt)-minimum)/rozliseni)+1;
    rozdeleni(index)=rozdeleni(index)+1;
end

%hodnoty g (definicni obor rozdeleni)

```

```

gg=ones(pocet_intervalu+1,1)*minimum;
for i=1:pocet_intervalu+1 gg(i)=gg(i)+(i-1)*rozliseni; end

%vypocet stredni hodnoty
stred=mean(gpamet(:,yy,xx,tt));

%vypocet rozptylu
rozptyl=0;
for i=1:N rozptyl=rozptyl+(gpamet(i,yy,xx,tt)-stred)^2; end
rozptyl=rozptyl/(N-1);

stred
rozptyl

%gaussovo rozdeleni
gaussovo=zeros(pocet_intervalu+1,1);
for i=1:pocet_intervalu+1
    gaussovo(i)=N*1/(2*pi*rozptyl)^(0.5)*exp(-(gg(i)-stred)*(gg(i)-stred)/(2*rozptyl))*rozliseni;
end

%vypocet vyvoje stredni kvadraticke odchylky od gaussova rozdeleni
odchylka=zeros(N,1);
for k=1:N
    rozdeleni_k=zeros(pocet_intervalu+1,1);
    for i=1:k
        index=round((gpamet(i,yy,xx,tt)-minimum)/rozliseni)+1;
        rozdeleni_k(index)=rozdeleni_k(index)+1;
    end

    rozdeleni_k=rozdeleni_k/N*k; %dorovnani rozd. na vypoctene gaussovo r.

    for i=1:pocet_intervalu+1
        odchylka(k)=odchylka(k)+(rozdeleni_k(i)-gaussovo(i))^2;
    end
    odchylka(k)=(odchylka(k)/k)^(0.5);
end

%graf - porovnani rozdeleni pixelu s gaussovim rozdelenim
subplot(2,1,1)
plot(gg,rozdeleni,'b',gg,gaussovo,'r')
title(['Srovnání pravděpodobnostního rozd. pixelu (' int2str(xx) ',' int2str(yy) ') s normálním rozd. pro ' int2str(N) ' hodnot']);
LEGEND('rozdeleni pixelu','normalni rozdeleni')
ylabel('cetnost')
xlabel(['g (' int2str(xx) ',' int2str(yy) ')']) %(hodnota bez sumu=' num2str(gres(yy,xx,tt)) '))

%graf - vyvoj stredni kvadraticke odchylky
subplot(2,1,2)
plot(20:N,odchylka(20:N),'g')
title(['Vyvoj smerodatne odchylky pravděpodobnostního '
    ' rozdeleni pixelu od normalního rozdeleni ']);
ylabel('smerodatna odchylka')
xlabel('pocet hodnot')

hodnota_pixelu_bez_sumu=gres(yy,xx,tt)
pocet_hodnot=N

```

Program pro určení nové transformační matice po vychýlení detektoru

```
%urceni nové transformační matice po vychylení detektoru
function [Tnew]=newtmat20x34(vychylka)

%vstup:
%vychylka - vektor uhlovych vychylek pro jednotlivé detektory (v radianech)

%vystup:
%Tnew - nova transformacni matice

%hranice
xmin=197.2; xmax=397.2;
ymin=-145; ymax=195;
nx=20; ny=34; % dx=dy=10

load chords %nahrani puvodnich primek pohledu detektoru

%vypocet primek pohledu detektoru po vychylení (pro horizontalni detektory)
newxchord=zeros(size(xchord,1),size(xchord,2));
newychord=zeros(size(ychord,1),size(ychord,2));
posledni=size(xchord,1);
for i=1:10
    dy2=ychord(posledni,i);
    dy1=ychord(1,i);
    dx=xchord(1,i)-xchord(posledni,i);
    zmena=(dy2-dy1)/dx;
    delka=dy2/zmena;
    zero=xchord(posledni,i)+delka;
    uhel=atan(zmena)+vychylka(i);
    newychord(:,i)=(zero-xchord(:,i))*tan(uhel);
end
newxchord=xchord(:,1:10);

%vypocet primek pohledu detektoru po vychylení (pro vertikální detektory)
stred15x=xchord(1,15);
newxchord(:,11:19)=xchord(:,11:19)-stred15x;
for i=11:19
    dx2=newxchord(97,i);
    dx1=newxchord(1,i);
    dy=ychord(1,i)-ychord(97,i);
    zmena=(dx1-dx2)/dy;
    delka=dx2/(-zmena);
    zero=ychord(97,i)+delka;
    uhel=atan(zmena)+vychylka(i);
    newxchord(:,i)=(zero-ychord(:,i))*tan(uhel);
end
newxchord(:,11:19)=newxchord(:,11:19)+stred15x;
newychord(:,11:19)=ychord(:,11:19);

%prevod na cm
xchord=newxchord*100;
ychord=newychord*100;

%volani funkce bttnmat_standard, která z primek pohledu detektoru vypocte
%novou transformacni matici
[Tnew,numdet]=bttnmat_standard(xchord,ychord,xmin,xmax,ymin,ymax,nx,ny);
```