České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

Bakalářská práce

Vliv různých činitelů na vysokofrekvenční tenzor permitivity

Dominika Mašlárová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Fyzika a technika termojaderné fúze

7. 7. 2016

Vyhlásenie

Vyhlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracovala samostatne a použila som iba literatúru uvedenú v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod proti použitiu tohoto školského diela v zmysle §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon).

V Prahe dňa ....

Dominika Mašlárová

Poďakovanie

Ďakujem prof. RNDr. Petru Kulhánkovi, CSc. za vedenie bakalárskej práce, za priateľský prístup pri konzultáciách a odborné rady, ktoré ma pri písaní práce správne nasmerovali a pomohli mi v pochopení danej problematiky. Veľká vďaka za podporu pri mojom štúdiu patrí mojej rodine, priateľom a Petrovi.

Názov práce: **Vplyv rôznych činiteľov na vysokofrekvenčný tenzor permitivity**
Autor: Dominika Mašlárová
Odbor: Fyzika a technika termojaderné fúze
Druh práce: bakalárska práca
Vedúci práce: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Abstrakt: Hlavným cieľom práce je preskúmať vplyv magnetického poľa, iónov a tlaku na vysokofrekvenčný tenzor pre elektromagnetický komplex vĺn v plazme a na základe toho odvodiť príslušné disperzné relácie. Tieto poznatky sú následne zúžitkované pri vykreslení trajektórie laserového lúča prechádzajúceho symetrickou nehomogenitou v plazme v θ-pinči a z-pinči pomocou metódy Ray tracing. Špeciálne sme sa zamerali na zobrazenie šlírovej metódy, ktorá sa používa pri diagnostikách plazmy. V závere je zhodnotené, či má zmysel jednotlivé vplyvy v praxi zohľadniť, alebo naopak zanedbať.
Kľúčové slová: plazma, tenzor permitivity, Ray tracing, šlírová metóda, pinč

Title: **Influence of various factors on the high frequency permittivity tensor**
Author: Dominika Mašlárová
Branch of study: Physics and technics of thermonuclear fusion
Type of thesis: Bachelor thesis
Supervisor: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Abstract: The main aim of this thesis is to explore the influence of various aspects such as magnetic field, ions and pressure on high frequency permittivity tensor for electromagnetic complex of waves in plasma and derive dispersion relations. Subsequently, this knowledge is used to plot trajectories of laser beam intersecting symetrical inhomogeneous plasma in θ-pinch and z-pinch with use of Ray Tracing method. Particularly, we visualize schlieren method. In conclusion, we consider if the infuence of mentioned aspects should be generally taken into account or not.
Key words: plasma, permittivity tensor, Ray tracing, schlieren method, pinch

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Šírenie elektromagnetických vĺn závisí na konkrétnom prostredí. Z bežnej skúsenosti vieme, že svetlo sa môže pri prechode látkou lámať a mať odlišné chovanie ako vo vákuu, v ktorom sa šíri rovnomerne priamočiaro. Tento rozdiel popisuje index lomu vlny. Zmena indexu lomu sa dá využiť v zobrazovacích technikách, napr. v šlírovej fotografii, pomocou ktorej zobrazujeme gradienty koncentrácie skúmanej látky.

Šlírová metóda sa využíva aj na skúmanie fyziky plazmy. Plazma ako systém častíc charakteristický kolektívnym chovaním a existenciou voľných nosičov náboja môže prenášať široké spektrum vlnení rôznych frekvencií. Vo všeobecnosti predpokladáme, že elektromagnetické vlny vysokých frekvencií interagujú s elektrónmi, ktoré majú oproti iónom malú hmotnosť. Ťažké ióny nestíhajú vysoké frekvencie sledovať. Zároveň predpokladáme, že pôvodné magnetické pole v plazme chod vlny neovplyvňuje, podobne ako tepelný pohyb častíc. Preto sa pri experimentálnom pozorovaní vysokofrekvenčných dejov predpokladá, že plazma je chladné prostredie bez magnetického poľa, ktoré je tvorené elektrónmi na nehybnom iónovom pozadí. Výnimkou nie je ani spomínaná šlírová metóda. Na základe uhlu odklonu svetelného lúča od pôvodného smeru pri prechode plazmou vieme určiť koncentráciu elektrónov, ktorej zmena ohyb lúča spôsobila.

Správnosťou vyššie uvedeného prístupu ku skúmaniu vysokofrekvenčných vĺn sa zaoberá práve táto práca, ktorá sa venuje tvaru tenzora permitivity pri vysokých frekvenciách. Permitivita je veličina, ktorá vyjadruje závislosť elektrickej intenzity a elektrickej indukcie. V jednoduchosti povedané, permitivita popisuje elektrické vlastnosti materiálu. Práca poskytuje odvodenia tenzora pri zohľadnení vyššie uvedených faktorov, magnetického poľa, iónov a tlaku. Motiváciou k týmto teoretickým odvodeniam je práve zhodnotenie korektného experimentálneho prístupu k danej problematike.

Element sprostredkujúci prepojenie medzi našim teoretickým a experimentálnym prístupom bude primerane zvolený počítačový softvér. Rapídny rozvoj počítačovej techniky v posledných desaťročiach výrazne ovplyvnil vedeckú komunitu. Pomáha overiť teóriu, simulovať experimenty, a častokrát ich aj suplovať. V našom prípade pôjde o zobrazenie prechodu svetelného lúča plazmatickým prostredím pomocou grafickej metódy Ray Tracing. Po odvodení fyzikálnych rovníc tak môžeme za použitia vhodnej numerickej metódy sledovať zmeny dráhy svetla vzhľadom ku rôznym fyzikálnym veličinám.

Pomocou relatívne jednoduchého programu budeme schopní potvrdiť alebo vyvrátiť teóriu používanú pri experimentoch s plazmou, v ktorých sa na diagnostiku využívajú elektromagnetické vlny vysokých frekvencií.

Kapitola 1

Základy fyziky plazmy

Táto práca je orientovaná na skúmanie činiteľov, ktoré ovplyvňujú výsledný predpis permitivity pre plazmatické prostredie. V závislosti na tom sa môžu vlny šíriť plazmou rôznym spôsobom.

Preto bude na začiatok dobré načrtnúť chovanie plazmy ako skupenstva. Predtým však ešte uvedieme základné pojmy z teórie vlnenia, ktoré neskôr aplikujeme na popis fyziky plazmy.

1.1 Základné pojmy z teórie vlnenia, lineárna teória

1.1.1 Vlnenie a jeho charakteristiky

Vlnenie ako jav si každý z nás vie určitým spôsobom predstaviť. V bežnom živote sa nám vybaví hlavne v spojení s kvapalinami. Či už sa nám pri buchnutí do stola rozhýbe hladina nápoja v pohári alebo pozorujeme obrovské vlny pri búrke na mori, stále ide o ten istý jav. Ak sa s niekým rozprávame, vnímame jeho reč ako zvuk. Ten nie je nič iné ako pozdĺžne sa šíriaca sa vlna, ktorú sme schopný našimi ušami vnímať. Ak začneme hovoriť, rozkmitáme molekuly vzduchu, ktoré rozkmitajú ďalšie molekuly a tie rozkmitajú ďalšie. Zvuk sa šíri rýchlosťou, ktorú nazývame rýchlosť zvuku.

Na tomto príklade si môžeme predstaviť, čo vlastne vlnenie fyzikálne predstavuje. Ide o šírenie určitého rozruchu veličiny priestorom v čase. To popisujeme vlnovou funkciou $\psi(t, \mathbf{x})$, závislej na priestorových súradniciach $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a čase t, či už ide o tlak, hustotu, elektrické alebo magnetické pole. Vlnová funkcia je väčšinou komplexná, a to kvôli zjednodušeniu výpočtov. Avšak fyzikálny význam má iba reálna časť funkcie.

Uvažujme reálnu funkciu $A(t, \mathbf{x})$, ktorú nazveme *amplitúda* a reálnu funkciu $\varphi(t, \mathbf{x})$, ktorú nazveme *fáza*. Funkciu $\psi(t, \mathbf{x})$ môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t, \mathbf{x})}, \tag{1.1}$$

kde e je Eulerovo číslo ako základ exponenciálnej funkcie a i je imaginárna jednotka.

Vlnenie delíme podľa rôznych aspektov, napr. podľa smeru šírenia, typu šírenia, tvaru jeho vlnoplochy, na lineárne a nelineárne a podobne.

Uhlová frekvencia je zmena fázy vlnenia podľa času, značíme ω:

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{1.2}$$

V prípade konštantnej uhlovej frekvencie môžeme písať $\omega = 2\pi/T$, kde T je *perióda.*

Vlnový vektor $\mathbf{k}$ je zmena fázy vlnenia podľa priestorových premenných:

$$\mathbf{k} = \nabla\varphi. \tag{1.3}$$

Vlnový vektor mieri v smere šírenia vĺn. V prípade konštantného vlnového vektoru môžeme hodnotu jeho veľkosti zapísať ako $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je *vlnová dĺžka*, vzdialenosť medzi opakujúcou sa periódou.

Vzťah medzi ω a $\mathbf{k}$ sa nazýva *disperzná relácia* a je charakteristický pre určitý typ vlnenia. Závislosť ω na $\mathbf{k}$ môže mať v niektorých príkladoch explicitný tvar, všeobecne však uvažujeme s implicitným tvarom $\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0$.

Rovinná monochromatická vlna je typ vlnenia, kde amplitúda $A(\mathbf{x}, t) = A$ je konštantná funkcia vzhľadom ku $\mathbf{x}$ a t a fáza je lineárna funkcia priestorových súradnic a času. Vlnová funkcia tejto vlny má špecifický tvar:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \tag{1.4}$$

Z rovinných vĺn s amplitúdami $A(\omega, k)$ môžeme poskladať vlnu všeobecnejšieho tvaru

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int A(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t)}\mathrm{d}^3\mathbf{k}. \tag{1.5}$$

Fázová rýchlosť v_f je rýchlosť presunu roviny konštantnej fáze. Voľme $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$. Vezmime rovnicu plochy konštantnej fáze $\varphi(x, t) = C$ a následne na ňu aplikujme diferenciál:

$$kx - \omega t = C, \tag{1.6}$$

$$k\mathrm{d}x - \omega\mathrm{d}t = 0, \tag{1.7}$$

$$v_f = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}. \tag{1.8}$$

Pri všeobecnej voľbe vektoru $\mathbf{k}$ platí pre veľkosť a vektor fázovej rýchlosti:

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2}\mathbf{k}. \tag{1.10}$$

To znamená, že fázová rýchlosť má identický smer ako vlnový vektor $\mathbf{k}$.

Grupová rýchlosť v_g je rýchlosť presunu vlnového balíka, vĺn podobných frekvencií a vlnových vektorov. Platí pre ňu:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{1.11}$$

Index lomu $\mathcal{N}$ je veličina, ktorá sa vzťahuje špeciálne ku elektromagnetickým vlnám. V rámci náväznosti na predošlé pojmy ju však spomenieme už teraz. Index lomu je teda definovaný vzťahom:

$$\mathcal{N} = \frac{c}{v_f}, \tag{1.12}$$

kde c je rýchlosť svetla. Je to bezrozmerná veličina, ktorá opisuje, ako sa elektromagnetické vlnenie šíri v danom prostredí. Vo vákuu platí $v_f = c$ a index lomu je jedna. Ak je fázová rýchlosť vlny menšia ako rýchlosť svetla, index lomu je väčší ako jedna. Pre bežné prostredia sa berie ako konštanta a je možné ju dohľadať vo fyzikálnych tabuľkách (napr. pre vodu je podľa tabuliek [2] index lomu pre svetlo s vlnovou dĺžkou $\lambda = 760,82$ nm rovný $\mathcal{N} = 1,329$ a fázová rýchlosť má teda podľa vzťahu (1.12) hodnotu $v_f = 0,752c$)[1]. Všeobecne sa však index lomu môže meniť v závislosti na polohe.

Pre index lomu sú dôležité dva limitné prípady. Prvým z nich je

$$\mathcal{N} \to \infty, \tag{1.13}$$

kedy ide o *rezonancie*. Pri rezonanciách platí

$$v_f \to 0 \tag{1.14}$$

a vlna je látkou na príslušnej frekvencii absorbovaná. Druhým zaujímavým limitným prípadom je *cut-off*, kedy platí

$$\mathcal{N} \to 0 \tag{1.15}$$

a

$$v_f \to \infty, \tag{1.16}$$

a ide o tzv. *medznú frekvenciu.* Za touto frekvenciou sa už vlna nešíri.

Poznatky o vlastnostiach vlnenia obsahuje i učebnica [1], z ktorej sme v predchádzajúcom texte čerpali. Vráťme sa ešte ku vzťahu (1.5). Spomínali sme, že predstavuje predpis pre všeobecnú vlnu, ktorá je zložená z rovinných vĺn. Tento zápis v sebe skrýva výhodu, ktorá má veľký praktický význam. S rovinnými vlnami sa totiž veľmi jednoducho pracuje. Ak vezmeme napr. deriváciu podľa času či priestorových súradníc funkcie (1.4). Na prvý pohľad vidíme, že jej tvar nám môže pomôcť riešiť rovnice, kde by sa všeobecné riešenie dalo nájsť ťažko, ak vôbec.

Matematické priradenie (1.5) zodpovedá Fourierovej transformácii. Rýchly prehľad k Fourierovej transformácii je možné nájsť na konci tejto práce v kapitole Matematický dodatok. Teraz sa sústredime na konkrétnu fyzikálnu aplikáciu a na spôsob, ako riešiť diferenciálne rovnice, o ktorých predpokladáme, že ich riešenia majú tvar vlnovej funkcie.

1.1.2 Lineárna teória

Lineárne vlnenie je možné popísať lineárnymi rovnicami a riešenie sa dá spravidla získať postupnou elimináciou premenných. Niektoré premenné sa pokúsime zo sústavy vylúčiť a znížiť tak ich počet. Výsledná rovnica bude jedna rovnica pre jednu neznámu a bude nejakým druhom vlnovej rovnice. Všeobecne ide o sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc a riešenie nemusí byť jednoduché. Budeme ho hľadať tak, že do sústavy dosadíme jednu konkrétnu rovinnú vlnu a budeme skúmať chovanie sústavy pre túto vlnu. Neskôr môžeme úplné riešenie pomocou rovinných vĺn zložiť. Ako sme už vyššie spomínali, pre deriváciu vlnovej funkcie (1.4) podľa časovej i priestorovej premennej platia špeciálne vzťahy. Špecifické sú tým, že pomocou nich môžeme parciálne derivácie nahradiť algebraickými výrazmi [1]. Derivujme rovinnú vlnu (1.4) podľa času. Dostávame:

$$\frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega\psi(t, \mathbf{x}). \tag{1.17}$$

[1] Index lomu nemusí byť len väčší ako jedna, všeobecne môže byť i menší. Fázová rýchlosť totiž nepopisuje rýchlosť šírenia informácie, je to iba rýchlosť pohybu fáze, a preto môže byť všeobecne väčšia ako rýchlosť svetla.

Opäť je možné vidieť analógiu s Fourierovou transformáciou vo Vete 1 v Matematickom dodatku. Vyjadrenie (1.17) je analogické (5.67), ak položíme $\psi = f$ a $-\omega = \xi$.

Takto si môžeme zjednodušiť počítanie inak podstatne zložitejších rovníc. V nasledujúcich riadkoch je uvedených pár užitočných výrazov, ktoré sa dajú v diferenciálnych rovniciach linearizovať [1].

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{i}}} \to \mathrm{i}k_{\mathrm{i}}, \tag{1.19}$$

$$\nabla \to -\mathrm{i}\mathbf{k}. \tag{1.20}$$

1.1.3 Nelineárna teória

Riešenie rovníc pre nelineárne vlnenie je komplikované a v podstate neexistuje žiaden všeobecný postup. Môžeme využiť lineárnu aproximáciu, ktorá je vhodná hlavne pre vlny malých amplitúd. Tie chápeme ako poruchy známeho riešenia. Postup je taký, že najprv nájdeme riešenie bez prítomnosti vĺn, či už ide o konštantné riešenie, alebo riešenie, ktoré má zložitejší predpis závisiaci na súradniciach polohy. Následne budeme chápať vlnu ako poruchu nám známeho riešenia. Predpokladáme, že poruchy sú rádovo veľmi malé, a preto budeme mocniny, ktoré sú vyššie ako prvá mocnina zanedbávať. Sústavu rovníc, ktorá popisuje naše riešenie budeme riešiť tak, že do nej dosadíme súčet nám známeho riešenia, ku ktorému pripočítame spomínanú malú poruchu. Tým sa nám podarilo pôvodnú sústavu rovníc upraviť na sústavu lineárnych rovníc. S takýmto výsledkom môžeme následne narábať rovnako ako v predošlej podkapitole. Nelineárna ako i lineárna teória je dobre rozpísaná v literatúre [1], z ktorej sme v tomto texte čerpali.

1.2 Plazma ako skupenstvo

Plazmu definujeme ako kvazineutrálny súbor častíc s voľnými nosičmi náboja, spravidla elektrónmi a iónmi rôznej násobnosti, ktorá vykazuje kolektívne chovanie. *Kolektívnym chovaním* rozumieme to, že plazma sama generuje elektromagnetické polia a zároveň na elektromagnetické polia reaguje. Nabité častice pri svojom pohybe môžu vytvárať lokálne koncentrácie pozitívneho resp. negatívneho náboja, ktoré vedú ku vzniku elektrických polí. *Kvazineutralita* je taká vlastnosť, že plazma ako celok pôsobí na väčšie vzdialenosti neutrálne. Lokálne častice interagujú, pôsobia na seba navzájom, reagujú na elektromagnetické pole vytvorené plazmovou tekutinou ako i na vonkajšie pôsobenia síl, no počet kladne a záporne nabitých častíc je v každom makroskopickom objeme rovnaký [3].

1.3 Fyzika plazmy a teória elektromagnetizmu

Ako bolo spomenuté v predošlej podkapitole, plazma je schopná reagovať na elektromagnetické polia. Pre popis takýchto polí používame Maxwellove rovnice, ktoré sú základom teórie elektromagnetizmu. Predpokladajme, že plazma je sústava častíc vo vákuu. Pre elektromagnetické pole potom platia vzťahy [4]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.22}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.24}$$

Pre hmotné prostredie platí [5]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1.25}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.26}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.27}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1.28}$$

Vektorovú veličinu $\mathbf{E}$ nazývame elektrická intenzita, veličinu $\mathbf{B}$ magnetická indukcia, ρ označuje nábojovú hustotu a $\mathbf{j}$ prúdovú hustotu voľného náboja. Viazaný náboj a prúd vznikajú polarizáciou a magnetizáciou prostredia a tie zahrňujeme do rovníc pomocou magnetickej intenzity $\mathbf{H}$ a elektrickej indukcie $\mathbf{D}$ pomocou ε a μ, permitivity a permeability. Špeciálne sa označuje permitivita resp. permeabilita vákua ε_0 resp. μ_0. V plazme nesú viazaný náboj častice, z ktorých je plazma zložená, teda elektróny a ióny.

Teraz odvodíme vzťah medzi elektrickou intenzitou a indukciou, ktorý je možný nájsť napr. vo vysokoškolských skriptách [4]. Polarizácia $\mathbf{P}$ je veličina zložená zo všetkých momentov elektrických dipólov. Tak vzniká viazaný náboj s nábojovou hustotou ρ_v:

$$\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{1.29}$$

Uvažujme Maxwellovu rovnicu pre vákuum (1.21). Pre hmotné prostredie musíme nábojovú hustotu rozložiť na hustotu voľného a viazaného náboja:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_v). \tag{1.30}$$

Dosaďme výraz (1.29) do (1.30). Dostávame:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1.31}$$

kde $\mathbf{D}$ je definovaná ako:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}). \tag{1.32}$$

Polarizácia $\mathbf{P}$ môže byť všeobecne funkciou elektrickej intenzity $\mathbf{E}$. Zapíšme, ako vyzerá k-tá zložku vektoru $\mathbf{D}$:

$$D_k = \varepsilon_0 E_k + P_k(\mathbf{E}). \tag{1.33}$$

K-tú zložku $\mathbf{P}$ môžeme zapísať ako

$$P_k(\mathbf{E}) = \frac{\partial P_k}{\partial E_l} E_l = \varepsilon_0 \chi_{kl}. \tag{1.34}$$

Následne dostávame konečný predpis pre elektrickú indukciu $\mathbf{D}$:

$$D_k = \varepsilon_0(\delta_{kl} + \chi_{kl}) E_l = \varepsilon_{kl} E_l, \tag{1.35}$$

$$\mathbf{D} = \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \mathbf{E}. \tag{1.36}$$

Veličina $\overset{\leftrightarrow}{\chi}$ sa nazýva elektrická susceptibilita, $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$ sa nazýva permitivita a obe všeobecne naberajú tvar tenzoru.

Medzi magnetickou indukciou a intenzitou platí obdobný vzťah

$$\mathbf{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H}. \tag{1.37}$$

Permeabilita podobne ako permitivita môže všeobecne naberať tvar tenzoru.

1.3.1 Plazmové oscilácie bez prítomnosti magnetického poľa

Uvažujme elektrické pole $\mathbf{E}$ a magnetické pole zvoľme $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Takéto pole rozkmitá tekutinu plazmy zloženú z elektrónovej a iónovej tekutiny na dvoch charakteristických frekvenciách. Zároveň spôsobí vznik globálneho elektrického poľa. Predpokladajme zanedbanie tepelného pohybu častíc. Pre prúdovú hustotu častíc s nábojom q pohybujúcich sa rýchlosťou $\mathbf{u}$ platí vzťah:

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{u}. \tag{1.38}$$

Symbol n označuje ich počet na objemovú jednotku. Uvažujme Maxwellovu rovnicu (1.24). Po dosadení danej prúdovej hustoty (1.38) a $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ dostávame rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{qn\mathbf{u}_\mathrm{e}}{\varepsilon_0}. \tag{1.39}$$

Pre častice zároveň platí pohybová rovnica:

$$mn\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = qn\mathbf{E}. \tag{1.40}$$

Symbolom m sme označili hmotnosť častice. V ďalšom kroku využijeme znalosti z lineárnej a nelineárnej teórie z predošlých podkapitol. Použijeme známe riešenie rovníc (1.39) a (1.40)

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad n = n_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{1.41}$$

Elektrické a rýchlostné pole sme položili rovné nulovému vektoru a koncentrácia častíc je rovná výrazu n_0, ktorý môže predstavovať konštantu alebo funkciu súradníc. K riešeniu (1.41) pripočítame malú poruchu:

$$\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}, \quad n = \delta n + n_0, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}. \tag{1.42}$$

Po dosadení (1.42) do rovníc (1.39) a (1.40) a po prevedení Fourierovej transformácie (1.18) sa rovnice (1.39) a (1.40) redukujú na tvary:

$$-\,\mathrm{i}\omega\delta\mathbf{E} = -\frac{qn\delta\mathbf{u}}{\varepsilon_0}, \tag{1.43}$$

$$-\,\mathrm{i}\omega mn\delta\mathbf{u} = qn\delta\mathbf{E}. \tag{1.44}$$

Vyjadrime z druhej z rovníc (1.44) poruchu pre elektrické pole:

$$\delta\mathbf{E} = -\mathrm{i}\frac{\omega mn\delta\mathbf{u}}{\omega}. \tag{1.45}$$

Tú dosadíme do (1.43). Dostávame vyjadrenie pre frekvenciu ω

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{q^2 n}{m\varepsilon_0}, \tag{1.46}$$

ktorú nazveme *plazmová frekvencia*. Je to vlastná oscilačná frekvencia častíc spôsobená prítomnosťou elektrického poľa. Špeciálne pre plazmovú frekvenciu elektrónov resp. iónov platí:

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \frac{e^2 n_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}, \tag{1.47}$$

resp.

$$\omega_{\mathrm{pi}}^2 = \frac{Z^2 e^2 n_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}\varepsilon_0}. \tag{1.48}$$

Znakom e sme označili elementárny náboj n_{e} resp. n_{i} predstavuje koncentráciu elektrónov resp. iónov na objemovú jednotku a m_{e} resp. m_{i} patrí označeniu hmotnosti elektrónu resp. iónu. Znakom Z sa označuje stupeň ionizácie. Pri odvodení sme využili poznatky z [1].

1.3.2 Plazmové oscilácie bez prítomnosti elektrického poľa

Tentokrát budeme skúmať pohyb jednotlivých častíc pri pôsobení magnetického poľa $\mathbf{B}$ a elektrické pole zvolíme $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pri postupe budeme vychádzať z literatúry [5]. Takýto pohyb nazývame *Larmorova rotácia* a častica sa pri ňom pohybuje po skrutkovici. Pohybová rovnica častice má tvar:

$$mn\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + mn(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}. \tag{1.49}$$

Ak magnetické pole zvolíme v smere osi z a jeho veľkosť bude rovná B a u_x, u_y resp. u_z budú predstavovať jednotlivé zložky vektoru $\mathbf{u}$. Uvažujme poruchu magnetického poľa a poruchu rýchlosti častíc v tvare:

$$m\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = qBu_y, \tag{1.50}$$

$$m\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = -qBu_x, \tag{1.51}$$

$$m\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.52}$$

Po aplikácii derivácie na rovnice (1.50) a (1.51) a ich vzájomným porovnaním nadobúdajú rovnice tvar zodpovedajúci chovaniu harmonického oscilátora, ktorý osciluje okolo svojej rovnovážnej polohy:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}^2 \mathrm{t}} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 u_x = 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}^2 t} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 u_y = 0. \tag{1.54}$$

Frekvencia takého oscilátora je vždy kladná alebo nulová. V tomto konkrétnom prípade ju nazývame *cyklotrónová frekvencia*. Ak je uvažovaná častica elektrón, označujeme ju ω_{ce}, v prípade iónov je to ω_{ci}:

$$\omega_{\mathrm{ce}} = \frac{eB}{m_{\mathrm{e}}}, \tag{1.55}$$

$$\omega_{\mathrm{ci}} = \frac{ZeB}{m_{\mathrm{i}}}. \tag{1.56}$$

Kapitola 2

Vplyv rôznych činiteľov na vysokofrekvenčný tenzor permitivity pre elektromagnetické vlny v plazme

Ako sme spomínali vyššie, vzťah medzi elektrickou indukciou **D** a elektrickou intenzitou **E** vyjadrujeme pomocou permitivity $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, resp. relatívnej permitivity $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r$:

$$\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\mathbf{E} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \mathbf{E}. \tag{2.1}$$

Pre vákuum platí špeciálny vzťah:

$$\varepsilon = \varepsilon_0. \tag{2.2}$$

ε_0 je podľa [6] konštanta nasledujúcej hodnoty:

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}. \tag{2.3}$$

Z toho vyplýva, že relatívna permitivita je vo vákuu rovná jednej, alebo ak chceme, jednotkovému tenzoru. V látkovom prostredí je $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ určená elektrickými vlastnosťami materiálu. Väčšinou nie je konštantou a naberá zložitejší predpis. To platí i v prípade anizotropného prostredia, ktoré predstavuje napr. plazma v prítomnosti magnetického poľa. V takom prostredí fyzikálne vlastnosti závisia od smeru a permitivitu v ňom určujeme pomocou tenzoru. Ako predpis pre tenzor odvodiť, si rozoberieme v nasledujúcich podkapitolách.

2.1 Chladná plazma bez zrážok a magnetického poľa so zanedbaním vplyvu iónov a tepelného pohybu elektrónov

V tejto časti zanedbáme ióny, a jediné častice, s ktorými budeme uvažovať budú elektróny. Elektromagnetické vlny majú vo všeobecnosti vysoké hodnoty frekvencie, preto ich ióny nestíhajú sledovať. Budeme postupovať tak, že sa z pohybovej rovnice pokúsime odvodiť poruchu rýchlostného poľa v závislosti na poruche elektrického poľa. Ako sme spomínali v prvej kapitole, polarizácia vo všeobecnosti závisi na elektrickej intenzite. Vyjadrime najprv jej poruchu v závislosti na poruche rýchlosti:

$$\delta\mathbf{P} = -en_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{e}} = -\mathrm{i}\frac{en_{\mathrm{e}_0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_{\mathrm{e}}. \tag{2.4}$$

Výraz $\delta\mathbf{x}_\mathrm{e}$ označuje poruchu polohového vektora elektrónov, malú zmenu v rámci priestorových súradníc. Prvá rovnosť v (2.4) je vlastne definícia polarizácie ako takej. Literatúra [4] nám hovorí, že vektor elektrickej polarizácie je hustota dipólového momentu. Dipólový moment elektrónu je rovný súčinu jeho náboja a vektoru polohy, teda porucha dipólového momentu je rovná súčinu náboja a poruchy polohového vektoru. Polarizáciu ako hustotu dipólového momentu už získame iba vynásobením dipólového momentu koncentráciou elektrónov. Teraz potrebujeme vyjadriť závislosť poruchy rýchlostného vektoru na poruche elektrickej intenzity. Ako uvidíme neskôr, poslúži nám to k odvodeniu permitivity. Zapíšme pohybovú rovnicu pre elektróny:

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} = -e n_\mathrm{e} \mathbf{E} \tag{2.5}$$

resp.

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} \frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{e}}{\partial t} + m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} (\mathbf{u}_\mathrm{e} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\mathrm{e} = -e n_\mathrm{e} \mathbf{E}. \tag{2.6}$$

Ióny, magnetické pole či tlak tentokrát zanedbáme. K ich vplyvu sa dostaneme v ďalších podkapitolách.

Najprv určíme jedno riešenie, pre ktoré rovnica platí:

$$\mathbf{u}_\mathrm{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}_0}. \tag{2.7}$$

Jedná sa o riešenie pokojové, kedy sú elektrické a rýchlostné pole nulové, a plazma má koncentráciu n_{e_0}. Pri tomto kroku je potrebné podotknúť dôležitý fakt. Zvolená koncentrácia elektrónov $n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}_0}$, ktorú sme zvolili za riešenie, nemusí byť všeobecne konštantou, ako sme to už naznačili pri odvodzovaní plazmovej frekvencie. V rôznych konfiguráciách môže naberať rôzny tvar v závislosti na polohe $n_\mathrm{e}(\mathbf{x}) = n_{\mathrm{e}_0}(\mathbf{x})$. V texte budeme ďalej používať označenie n_{e_0}, no v momente, keď ju budeme brať ako funkciu, na to upozorníme.

Pokračujme v riešení rovnice (2.6). Za premenné dosadíme linearizované riešenia:

$$\mathbf{u}_\mathrm{e} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{e}, \quad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E}, \quad n_\mathrm{e} = \delta n_\mathrm{e} + n_{\mathrm{e}_0}. \tag{2.8}$$

Dostávame

$$m_\mathrm{e} n_{\mathrm{e}_0} \frac{\partial(\delta\mathbf{u}_\mathrm{e})}{\partial t} = -e n_{\mathrm{e}_0} \delta\mathbf{E}. \tag{2.9}$$

Ako vidíme, druhý člen v rovnici (2.6) na ľavej strane nám vypadol. Dôvod je ten, že sa v ňom vyskytla druhá mocnina poruchy rýchlostného vektoru. Ako sme pri vysvetlení nelineárnej teórie v prvej kapitole spomínali, takýto člen bude malého rádu v porovnaní s ostatnými členmi, a preto ho zanedbávame. Na rovnicu (2.9) aplikujeme Fourierovu transformáciu (1.18):

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{\omega m_\mathrm{e}} \delta\mathbf{E}. \tag{2.10}$$

Vyjadrenie (2.10) predstavuje závislosť, ktorú sme hľadali a môžeme ju teda dosadiť do vzťahu pre polarizáciu (2.4):

$$\delta\mathbf{P} = -\frac{e^2 n_{\mathrm{e}_0}}{\omega^2 m_\mathrm{e}} \delta\mathbf{E}. \tag{2.11}$$

Pomocou tohto vyjadrenia zas získame predpis pre elektrickú indukciu:

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} - \frac{e^2 n_{\mathrm{e}_0}}{\omega^2 m_{\mathrm{e}}} \delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\right) \delta \mathbf{E}. \tag{2.12}$$

Tým, že sme vytkli permitivitu vákua, dostali sme do výrazu pre indukciu plazmovú frekvenciu.[1] Keďže platí

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \delta \mathbf{E}, \tag{2.13}$$

pre relatívnu permitivitu automaticky dostávame

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}. \tag{2.14}$$

Vidíme, že relatívna permitivita (2.14) závisí iba na plazmovej frekvencii elektrónov a frekvencii prechádzajúcej vlny, nevykazuje anizotropiu, a nie je potrebné ju písať v tvare tenzoru. Avšak všeobecne môže byť funkciou súradníc. Ako sme totiž spomínali, koncentrácia elektrónov, na ktorej je plazmová frekvencia elektrónov závislá, môže byť na polohovom vektore závislá.

2.2 Chladná plazma bez zrážok a magnetického poľa so zanedbaním tepelného pohybu častíc

V tejto podkapitole zohľadníme vplyv iónov. Permitivita nebude naďalej vykazovať anizotropiu, no jej predpis sa zmení. Pre ióny platí samostatná pohybová rovnica v tvare

$$m_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{\partial t} + m_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}} (\mathbf{u}_{\mathrm{i}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathrm{i}} = Z e n_{\mathrm{i}} \mathbf{E}, \tag{2.15}$$

kde sme predpokladali viacnásobnú ionizáciu. Elektróny a ióny teda budú tvoriť v našom predpoklade dve samostatné tekutiny. K polarizácii už teda nebude prispievať iba tok elektrónov, ale i iónov, ktorých polohový vektor označíme $\delta \mathbf{x}_{\mathrm{i}}$ a vektor rýchlostného poľa $\delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}$:

$$\delta \mathbf{P} = -e n_{\mathrm{e}_0} \delta \mathbf{x}_{\mathrm{e}} + Z e n_{\mathrm{e}_0} \delta \mathbf{x}_{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \frac{e n_{\mathrm{e}_0}}{\omega} \delta \mathbf{u}_{\mathrm{e}} + \mathrm{i} \frac{Z e n_{\mathrm{i}_0}}{\omega} \delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}. \tag{2.16}$$

Opäť sa teda dostávame pre obdobnú úlohu, a to vyjadriť poruchu $\delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}$ z pohybovej rovnice (2.15). Začneme určením známeho riešenia:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{i}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}_0}, \tag{2.17}$$

a pokračovať budeme linearizáciou:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{i}} = \delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}, \quad n_{\mathrm{i}} = \delta n_{\mathrm{i}} + n_{\mathrm{i}_0}. \tag{2.18}$$

Dosadením (2.18) do rovnice (2.15) a aplikovaním Fourierovej transformácie (1.18) na výraz s parciálnou deriváciou rýchlostného poľa iónov podľa času dostaneme vyjadrenie

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathrm{i} \frac{Z e}{m_{\mathrm{i}} \omega} \delta \mathbf{E}. \tag{2.19}$$

[1]Ako druhú mocninu plazmovej frekvencie elektrónov sme označili výraz $\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \frac{e^2 n_{\mathrm{e}0}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}$, čím môže vznikať nezrovnalosť s definíciou (1.47). Výraz n_{e_0} je konkrétnym prípadom koncentrácie elektrónov, $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}0}$, a ďalej v práci sa stretneme s plazmovou frekvenciou iba v tomto zmysle, preto budeme odteraz pod druhou mocninou elektrónovej plazmovej frekvencie rozumieť výraz $\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \frac{e^2 n_{\mathrm{e}0}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}$.

Po dosadení vzťahu (2.10) pre rýchlostné pole elektrónov a vzťahu (2.19) pre rýchlostné pole iónov do vzťahu pre polarizáciu (2.16) zisťujeme, že platí:

$$\delta \mathbf{P} = -\frac{e^2 n_{\mathrm{e}_0}}{\omega^2 m_{\mathrm{e}}}\delta \mathbf{E} - \frac{Z^2 e^2 n_{\mathrm{i}_0}}{\omega^2 m_{\mathrm{i}}}\delta \mathbf{E}, \tag{2.20}$$

a teda pre elektrickú indukciu už ľahko vyjadríme:

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} - \frac{e^2 n_{\mathrm{e}_0}}{\omega^2 m_{\mathrm{e}}}\delta \mathbf{E} - \frac{Z^2 e^2 n_{\mathrm{i}_0}}{\omega^2 m_{\mathrm{i}}}\delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}\right)\delta \mathbf{E}. \tag{2.21}$$

Všimnime si, že vzťah pre indukciu už nezávisí iba na uhlovej frekvencii prechádzajúcej vlny a plazmovej frekvencii elektrónov, ale i na plazmovej frekvencii iónov[2], vlastnej oscilačnej frekvencii týchto častíc. Opäť vieme, že platí $\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \delta \mathbf{E}$ a teda permitivita naberá tvar

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}. \tag{2.22}$$

Vidíme zmenu oproti výrazu (2.14). Započítaním iónov sme zistili zaujímavý fakt. Výraz zahrňujúci plazmovú frekvenciu iónov, ktorý sme do predpisu relatívnej permitivity zahrnuli, je analogický tomu s plazmovou frekvenciou elektrónov. Relatívna permitivita je teda aditívna ku svojim zložkám v zmysle

$$\varepsilon_r = 1 - \sum_{l=i,e} \frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}. \tag{2.23}$$

Teoretické vyjadrenie nám na prvý pohľad hovorí, že elektróny a ióny prispievajú k zmene permitivity rovnako. V praxi to však úplne neplatí. Skúsime si to načrtnúť na konkrétnych hodnotách.

Vezmime si ten najjednoduchší prípad iónu, a to samotný protón. Pokojová energia elektrónu je (podľa zdroja [7]) rovná 0,511 MeV a protónu 938 MeV. To znamená, že protón je približne 1836-krát ťažší ako elektrón. Keď si pripomenieme, ako vyzerajú druhé mocniny plazmových frekvencií elektrónov a iónov,

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2 = \frac{e^2 n_{\mathrm{e}_0}}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0} \qquad \text{a} \qquad \omega_{\mathrm{pi}}^2 = \frac{Z^2 e^2 n_{\mathrm{i}_0}}{m_{\mathrm{i}}\varepsilon_0}, \tag{2.24}$$

vidíme, že tam vystupuje hmotnosť jednotlivých častíc v menovateli. To nás vedie k úvahe, že pre ťažsie ióny bude veľkosť plazmovej frekvencie menšia ako pre ľahšie elektróny. Hodnoty plazmových frekvencií je možné vypočítať samostatne zistením príslušných konštánt a parametrov plazmy (my budeme predpokladať stupeň ionizácie plazmy $Z = 1$), alebo si môžeme pomôcť nejakým online programom. Na stránkach The University of Warwick [8] je možné nájsť *Plasma calculator*, t.j. „plazmovú kalkulačku“, ktorá je schopná počítať rôzne parametre pre plazmu. Pokiaľ zvolíme, že chceme počítať parametre pre tokamak a zadáme hustotu elektrónov rovnú $n_{\mathrm{e}} = 10^{19}$ m^{-3} (podľa [9]), dostaneme pre plazmovú frekvenciu elektrónov a protónov hodnoty (zaokrúhlene)

[2]Podobne ako pri plazmovej frekvencii elektrónov sme plazmovú frekvenciu iónov označili ako výraz $\omega_{\mathrm{pi}}^2 = \frac{Z^2 e^2 n_{\mathrm{i}_0}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{i}}}$, čím môže vznikať nezrovnalosť s definíciou (1.48). Výraz n_{i_0} je konkrétnym prípadom koncentrácie elektrónov, $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{i}_0}$, a ďalej v práci sa stretneme s plazmovou frekvenciou iba v tomto zmysle, preto budeme odteraz pod plazmovou frekvenciou rozumieť výraz $\omega_{\mathrm{pi}}^2 = \frac{e^2 n_{\mathrm{i}_0}}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}$.

$$\omega_{\mathrm{pe}} = 1,8 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \text{a} \qquad \omega_{pp} = 4,2 \cdot 10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{2.25}$$

a teda pre ich druhú mocninu približne platí

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2 = 3,2 \cdot 10^{22}\ \mathrm{s}^{-2} \qquad \text{a} \qquad \omega_{pp}^2 = 1,8 \cdot 10^{19}\ \mathrm{s}^{-2}. \tag{2.26}$$

Druhá mocnina plazmovej frekvencie iónov vystupuje vo výraze (2.22) o tri rády menšia než plazmová frekvencia elektrónov. To je aj dôvod, prečo sa obvykle vo výpočtoch relatívnej permitivity vplyv iónov zanedbáva, t.j. $\omega_{\mathrm{pi}} << \omega_{\mathrm{pe}}$.

K vplyvu iónov a jeho dôkladnejšiemu rozboru sa ešte dostaneme. Najprv však zistíme, ako sa nám zmení teoretický predpis permitivy, ak budeme brať do úvahy ďalšie vplyvy, a to magnetické pole a tepelný pohyb častíc.

2.3 Chladná plazma bez zrážok so zanedbaním vplyvu iónov pod vplyvom magnetického poľa

Budeme sledovať chovanie chladnej plazmy (zanedbávame tepelné javy) pri vysokých frekvenciách a pôsobení magnetického poľa. Ióny považujeme za nepohyblivé, podobne ako v sekcii 2.1. Plazma je zložená iba z jednej tekutiny, s jednou pohybovou rovnicou, a to tekutiny elektrónovej. Položíme teda $m_{\mathrm{i}} \to +\infty$. Čo nezanedbáme, bude vplyv počiatočného magnetického poľa v plazme. Označme ho $\mathbf{B}_0$. Práve magnetické pole je príčinou anizotropie, a spôsobuje, že permitivita naberá tvar tenzoru. Odvodíme si, ako taký tenzor vyzerá. Odvodenie je možné nájsť i v učebnici plazmy [1], z ktorej sme čerpali. Vezmime teda pohybovú rovnicu pre elektróny:

$$m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{e}}}{\partial t} + m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}} (\mathbf{u}_{\mathrm{e}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathrm{e}} = -e n_{\mathrm{e}} \mathbf{E} - e n_{\mathrm{e}} \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \times \mathbf{B}. \tag{2.27}$$

Na pravej strane sme okrem elektrickej intenzity zahrnuli aj magnetické pole. Rovnicu budeme riešiť pre malé zmeny veličín n_{e}, u_{e}, $\mathbf{E}$, ako sme to robili aj predtým. Samozrejme musíme ešte zahrnúť poruchu magnetického poľa. Známe riešenie bude vyzerať nasledovne:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{e}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}_0}. \tag{2.28}$$

Zaujímavé je, že aj keď sme vyjadrili počet elektrónov na jednotku objemu $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}_0}$ a pri celkovom odvodení tenzoru ju budeme potrebovať, pri riešení rovnice (2.27) nie je jej vyjadrenie nutné. Všimnime si, že koncentrácia sa v pohybovej rovnici vyskytuje vo všetkých členoch. Preto ju môžeme vynechať a v podstate pracujeme s rovnicou pre jeden elektrón [3]

$$m_{\mathrm{e}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{e}}}{\partial t} + m_{\mathrm{e}} (\mathbf{u}_{\mathrm{e}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathrm{e}} = -e \mathbf{E} - e \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \times \mathbf{B}. \tag{2.29}$$

Ak teda rýchlostné pole elektrónov, elektrická intenzita, magnetické pole a koncentrácia elektrónov prekonajú malú poruchu, bude to vyzerať nasledovne:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{e}} = \delta \mathbf{u}_{\mathrm{e}}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}_0} + \delta n_{\mathrm{e}}. \tag{2.30}$$

Dosadením (2.30) do rovnice (2.27) a prevedením Fourierovej transformácie získame vyjadrenie poruchy rýchlosti elektrónov:

$$\delta \mathbf{u}_{\mathrm{e}} = -\mathrm{i} \frac{e}{m_{\mathrm{e}} \omega} \delta \mathbf{E} - \mathrm{i} \frac{e}{m_{\mathrm{e}} \omega} \delta \mathbf{u}_{\mathrm{e}} \times \mathbf{B}_0. \tag{2.31}$$

[3] Rovnako tomu bolo i v predošlých odvodeniach v sekciách 2.1 a 2.2.

Všimnime si, že vo výraze (2.31) vystupuje iba magnetické pole $\mathbf{B}_0$ a porucha magnetického poľa $\delta\mathbf{B}$ nám z pohybovej rovnice vypadla. Pokiaľ by sme do (2.31) dosadili $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$, prešli by sme na vyjadrenie rýchlostného poľa elektrónov v tvare (2.10). Znamená to, že ak v plazme nebolo počiatočné nenulové magnetické pole $\mathbf{B}_0$, relatívna permitivita si zachováva tvar (2.14), ako by tam žiadne magnetické pole nefigurovalo. Porucha magnetického poľa vyvolaná elektromagnetickou vlnou tvar permitivity neovplyvní. Predpis pre permitivitu pre elektromagnetickú vlnu a pre vlnu, kde je hybnou silou iba pole elektrické, je totožný.

Úpravami rovnice (2.31) vyjadríme vzťah medzi poruchou elektrickej intenzity $\delta\mathbf{E}$ a poruchou rýchlostného poľa elektrónov $\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}$. Zapíšme teda, ako vyzerá k-tá zložka poruchy rýchlostného poľa

$$\delta u_{e_k} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k - \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_{0m}\epsilon_{klm}\delta u_{e_l}, \tag{2.32}$$

a prehoďme členy s rýchlostnou zložkou na jednu stranu a člen s elektrickou zložkou na druhú stranu:

$$\delta u_{e_l}(\delta_{kl} + \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_{0m}\epsilon_{klm}) = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k.$$

Teraz môžeme vyjadriť elegantnejší tvar závislosti poruchy rýchlostného poľa na elektrickej intenzite pomocou matice $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E}, \tag{2.33}$$

kde pre kl-tú zložku $\mathbf{M}$ platí

$$M_{kl} = \delta_{kl} + \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_{0m}\epsilon_{klm}. \tag{2.34}$$

Predtým, ako zapíšeme tvar matice, si ju ešte zjednodušíme tým, že zvolíme $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Magnetické pole bude teda konštatné a bude mieriť v smere osi z.[4] Matica $\mathbf{M}$ naberá tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ce}}{\omega} & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ce}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

V matici sa nám objavila cyklotrónová frekvencia elektrónov, ktorej predpis sme odvodili v prvej kapitole.

Maticu $\mathbf{M}$ síce máme, vo výraze (2.33) ju však potrebujeme ešte previesť na druhú stranu, aby sme získali explicitné vyjadrenie poruchy rýchlosti:

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\mathbf{M}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{2.36}$$

Teraz musíme vypočítať inverznú maticu $\mathbf{M}^{-1}$ k matici $\mathbf{M}$. Výpočet je samozrejme možné previesť ručne, my sme pre rýchlejší výsledok použili program *Mathematica 10*. Vyšlo nám:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1-\frac{\omega_\mathrm{ce}^2}{\omega^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ce}}{\omega} & 0 \\ \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ce}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_\mathrm{ce}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

[4] Magnetické pole môže byť všeobecne funkciou polohového vektora, podobne ako koncentrácia častíc. V tejto chvíli nám ale predpoklad konštantného poľa stačí. V momente, keď bude pole závisieť na priestorových súradniciach na to upozorníme.

Pomocou predošlých rovníc môžeme vyjadriť vzťah pre elektrickú indukciu **D** a pre tenzor permitivity $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Pri odvodení opäť začneme s klasickým vzťahom závislosti elektrickej indukcie **D** na elektrickej intenzite **E** a polarizácii **P**. Následne dosadíme do rovnice vzorec pre poruchu rýchlosti elektrónov (2.36):

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - en_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{x}_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\frac{en_{\mathrm{e}0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \frac{e^2 n_{\mathrm{e}0}}{m_{\mathrm{e}}\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{2.38}$$

Dostávame tak vzťah pre tenzor permitivity

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_0(\mathbf{1} - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}), \tag{2.39}$$

resp. relatívnej permitivity

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \mathbf{1} - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}. \tag{2.40}$$

Narozdiel od (2.14) sa vo výraze (2.40) vyskytuje ešte matica (2.37), zahŕňajúca magnetické pole a spôsobujúca to, že permitivita bude v tvare tenzoru. Tenzor permitivity sa zvyčajne zapisuje ako

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} S & -\mathrm{i}D & 0 \\ \mathrm{i}D & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

kde koeficienty S, P a D nazývame Stixove koeficienty. Platí pre ne:

$$S = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}, \tag{2.42}$$

$$D = -\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}$$

a

$$P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}.$$

Stixove koeficienty sú pomenované podľa fyzika T. H. Stixa, ktorý ich vo svojej knihe o plazme *Waves in plasma* [10] definoval. Medzi Stixove koeficienty patrí i výraz

$$X = RL/S, \tag{2.43}$$

uvedený v [1], kde

$$R = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}},$$

a

$$L = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1+\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}}.$$

Platnosť (2.41) si môžeme v určitom zmysle overiť. Keď totiž položíme magnetické pole limitne rovné nule, tenzor musí prejsť na výraz (2.14). Ak $B_0 \to 0$, automaticky i $\omega_{\mathrm{ce}} \to 0$. Pre Stixove koeficienty v takom prípade (2.42) platí

$$S = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}, \tag{2.44}$$

$$D = 0,$$

a

$$P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}.$$

Na diagonále tenzoru teda ostal výraz $1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}$, členy mimo diagonály sú nulové. Permitivita sa v takom prípade už nemusí písať v tvare tenzoru a prechádza na tvar ktorý sme očakávali, teda

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}.$$

2.4 Chladná plazma bez zrážok so zanedbaním tepelného pohybu častíc pod vplyvom magnetického poľa

Uvažujme totožnú pohybovú rovnicu (2.27) pre elektróny v chladnej plazme ako v predošlej podkapitole. Tentoraz ale predpokladajme, že ióny majú reálnu hmotnosť podobne ako v 2.2 a opäť pripusťme, že by mohli byť ionizované viacnásobne. Zapíšme pre nich analogickú pohybovú rovnicu:

$$m_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{\partial t} + m_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}} (\mathbf{u}_{\mathrm{i}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\mathrm{i}} = Zen_{\mathrm{i}} \mathbf{E} + Zen_{\mathrm{i}} \mathbf{u}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{B}. \tag{2.45}$$

Oproti (2.15) sme pridali magnetické pole, ktoré bude na pohyb iónov tiež vplývať, keďže podobne ako elektróny sú i ióny nabité častice. Pre ióny budeme ako známe riešenie voliť sadu

$$\mathbf{u}_{\mathrm{i}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}_0}, \tag{2.46}$$

a do rovnice (2.45) budeme teda dosadzovať

$$\mathbf{u}_{\mathrm{i}} = \delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}_0} + \delta n_{\mathrm{i}}. \tag{2.47}$$

Po dosadení a vykonaní Fourierovej transformácie získame poruchu rýchlosti iónov:

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} \delta \mathbf{E} + \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} \delta \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}_0. \tag{2.48}$$

Sériou úprav vyjadríme vzťah medzi malou poruchou elektrickej intenzity $\delta \mathbf{E}$ a malou poruchou rýchlostného poľa iónov $\delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}$. Pre k-tú zložku $\delta \mathbf{u}_{\mathrm{i}}$ píšme:

$$\delta u_{i_k} = \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} \delta E_k + \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} B_{0m} \epsilon_{klm} \delta u_{i_l}, \tag{2.49}$$

$$\delta u_{i_l} (\delta_{kl} - \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} B_{0m} \epsilon_{klm}) = \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} \delta E_k.$$

V ďalšom kroku označme

$$N_{kl} = \delta_{kl} - \mathrm{i} \frac{Ze}{m_{\mathrm{i}} \omega} B_{0m} \epsilon_{klm} \tag{2.50}$$

ako kl-tú zložku matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega} & 0 \\ \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Vzťah medzi poruchou rýchlosti iónov a elektrickou intenzitou môžeme teraz písať v tvare

$$\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}_i = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_\mathrm{i}\omega}\delta\mathbf{E}. \tag{2.52}$$

Označme symbolom $\mathbf{N}^{-1}$ maticu inverznú ku matici $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{1-\frac{\omega_\mathrm{ci}^2}{\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ci}}{\omega} & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_\mathrm{ci}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_\mathrm{ci}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Z (2.52) Dostávame vyjadrenie pre poruchu rýchlosti iónov:

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_\mathrm{i}\omega}\mathbf{N}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{2.54}$$

Tenzor permitivity odvodíme už tradičným postupom. Nezabudneme na to, že k polarizácii prispievajú elektróny aj ióny:

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - en_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{x}_\mathrm{e} + Zen_{i0}\delta\mathbf{x}_\mathrm{i} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\frac{en_{\mathrm{e}_0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} + \mathrm{i}\frac{Zen_{\mathrm{i}_0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{i}. \tag{2.55}$$

Za poruchy $\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}$ a $\delta\mathbf{u}_i$ dosadíme (2.36) a (2.54):

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\frac{en_{\mathrm{e}_0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} + \mathrm{i}\frac{Zen_{\mathrm{e}_0}}{\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{i} = \varepsilon_0(1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}\mathbf{N}^{-1})\delta\mathbf{E}, \tag{2.56}$$

Tenzor relatívnej permitivity naberá tvar

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = (\mathbf{1} - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}\mathbf{N}^{-1}). \tag{2.57}$$

Využijeme zápis pomocou Stixových koeficientov (2.41)

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{\frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_\mathrm{ce}^2}{\omega^2}} - \frac{\frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_\mathrm{ci}^2}{\omega^2}}, \\ D &= -\frac{\omega_\mathrm{ce}}{\omega}\frac{\frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_\mathrm{ce}^2}{\omega^2}} + \frac{\omega_\mathrm{ci}}{\omega}\frac{\frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_\mathrm{ci}^2}{\omega^2}}, \\ P &= 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Môžeme si všimnúť podobný jav, aký sme zistili pri odvodení (2.23). Stixove koeficienty sú aditívne ku svojim komponentom S a P v zmysle

$$S = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{\frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{cl}^2}{\omega^2}}$$

a

$$P = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}.$$

Tento fakt zmieňuje i T. H. Stix v jeho, už vyššie spomínanej knihe [10]. Nezrovnalosť v aditivite však nastáva pri koeficiente D. Zložky koeficientu sa rovnajú až na znamienko.

Nastáva to kvôli tomu, že cyklotrónovú frekvenciu berieme vždy ako kladnú a náboj častice q uvádzame v absolútnej hodnote. Náboj elektrónu q_e je ale záporný, náboj iónov q_i kladný. Koeficient D v skutočnosti tiež vykazuje aditivitu, ale musíme ho zapísať v tvare

$$D = \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{q_l B_0}{m_l \omega} \frac{\frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_{\mathrm{c}l}^2}{\omega^2}},$$

aby sme mohli byť skutočne korektní.

Ak vypočítame z (2.58) limitu $\omega_\mathrm{pi} \to 0$ a zanedbáme tým pôsobenie iónov, prejdeme na tvar Stixových koeficientov pre chladnú plazmu so zanedbaním vplyvu iónov (2.42). Ak zas zanedbáme magnetické pole a budeme uvažovať s $B_0 \to 0$ resp. $\omega_\mathrm{ce} \to 0$, prejdeme podľa očakávaní vo výraz

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2},$$

odvodený v 2.2, ktorý anizotropiu nevykazuje. Stixove koeficienty majú v takom prípade tvar

$$S = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}, \qquad (2.59)$$
$$D = 0$$

a

$$P = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_\mathrm{pi}^2}{\omega^2}.$$

2.5 Tepelný pohyb elektrónov so zanedbaním vplyvu iónov v bezzrážkovej plazme bez vplyvu magnetického poľa

Doteraz sme sa zaoberali chladnou plazmou a neuvažovali so žiadnou stavovou rovnicou a tepelnými pohybmi častíc. Teplota v plazme bola limitne rovná nule. Tento stav je samozrejme aproximáciou. Plazma sa vyskytuje v rôznych teplotných škálach, v knihe [1] môžeme nájsť, že vodíková plazma má v polárnej žiare teplotu približne 10^3 K, v hmlovinách 10^4 K, v slnečnej koróne 10^6 K a v experimentálnych zariadeniach ako sú tokamaky a pinče sa teplota pohybuje okolo 10^8 K.

V nasledujúcom texte zohľadníme tepelný pohyb elektrónov, no zanedbáme vplyv ionóv a pôsobiace magnetické pole. Počiatočné magnetické pole v plazme sme teda položili rovné nule. Elektromagnetická vlna síce po prechode plazmou spôsobuje poruchu magnetického poľa, no tá sa (ako sme to spomenuli v 2.3) vo vzťahu pre permitivitu neprejaví , a preto nemusíme do pohybovej rovnice magnetické pole zahŕňať. Permitivita je rovnaká pre elektromagnetickú vlnu a pre vlnu, kde je hybnou silou iba elektrické pole.

Tepelný pohyb elektrónov môžeme do pohybovej rovnice zahrnúť ako gradient tlaku elektrónov ∇p_e:

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} \frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{e}}{\partial t} + m_\mathrm{e} n_\mathrm{e} (\mathbf{u}_\mathrm{e} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\mathrm{e} = -e n_\mathrm{e} \mathbf{E} - \nabla p_\mathrm{e}. \qquad (2.60)$$

Predpokladajme, že pre elektróny platí polytropná stavová rovnica [1]:

$$p_\mathrm{e} = C_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{\gamma_\mathrm{e}}. \qquad (2.61)$$

C_e je konštanta, a γ_e je polytropný koeficient, pre ktorý platí [5]:

$$\gamma_\mathrm{e} = \frac{s_\mathrm{e} + 2}{s_\mathrm{e}}, \tag{2.62}$$

kde s_e značí počet stupňov voľnosti elektrónov. Podľa učebnice zaoberajúcou sa fyzikou plazmy [5] platí rovnica (2.61) vtedy, ak je tepelná vodivosť v plazme malá. Pre popis väčšiny javov je ale toto priblíženie postačujúce.

Z rovnice (2.61) vyjadríme malú poruchu tlaku:

$$\delta p_\mathrm{e} = C_\mathrm{e}\gamma_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{\gamma_\mathrm{e}-1}\delta n_\mathrm{e}. \tag{2.63}$$

Konštantu C_e vyjadríme z pôvodnej rovnice (2.61):

$$C_\mathrm{e} = p_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{-\gamma_\mathrm{e}}, \tag{2.64}$$

a dosadíme do (2.63):

$$\delta p_\mathrm{e} = C_\mathrm{e}\gamma_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{\gamma_\mathrm{e}-1}\delta n_\mathrm{e} = p_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{-\gamma_\mathrm{e}}\gamma_\mathrm{e} n_\mathrm{e}^{\gamma_\mathrm{e}-1}\delta n_\mathrm{e} = \gamma_\mathrm{e}\frac{p_\mathrm{e}}{n_\mathrm{e}}\delta n_\mathrm{e}. \tag{2.65}$$

Pre elektróny zároveň platí stavová rovnica [1]

$$p_\mathrm{e} = k_\mathrm{B} T_\mathrm{e} n_\mathrm{e}. \tag{2.66}$$

Symbol T_e označuje termodynamickú teplotu a k_B Boltzmannovu konštantu [11]:

$$k_\mathrm{B} = 1,38 \cdot 10^{-23}\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}. \tag{2.67}$$

Stavovú rovnicu (2.66) dosadíme do (2.65). Dostávame vzťah pre poruchu tlakového členu elektrónov

$$\delta p_\mathrm{e} = \gamma_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}\delta n_\mathrm{e}. \tag{2.68}$$

Vzťah (2.68) je možné zapísať v tvare uvedenom v literatúre [1]:

$$\delta p_\mathrm{e} = c_\mathrm{e}^2 m_\mathrm{e}\delta n_\mathrm{e}. \tag{2.69}$$

Symbolom c_e sme označili zvukovú rýchlosť elektrónov:

$$c_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{\gamma_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}}. \tag{2.70}$$

Toto značenie je pre elektróny iba formalizmom a podľa [1] sa nejedná o skutočný zvuk, ktorý môžeme ľudským uchom zachytiť. Pustime sa do úpravy pohybovej rovnice (2.60). Dosadíme do nej sadu výrazov

$$\mathbf{u}_\mathrm{e} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{e}, \quad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E}, \quad n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}_0} + \delta n_\mathrm{e} \quad p_\mathrm{e} = p_{\mathrm{e}0} + \delta p_\mathrm{e}, \tag{2.71}$$

v ktorých sme ku známemu riešeniu

$$\mathbf{u}_\mathrm{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad n_\mathrm{e} = n_{\mathrm{e}_0} \quad p_\mathrm{e} = p_{\mathrm{e}0}, \tag{2.72}$$

pripočítali poruchové členy a aplikujeme Fourierovu transformáciu. Dostávame:

$$-\mathrm{i}\omega m_\mathrm{e} n_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -e n_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\delta p_\mathrm{e}\mathbf{k}. \tag{2.73}$$

Člen δp_e dosadíme z (2.69):

$$-\mathrm{i}\omega m_\mathrm{e} n_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -e n_{\mathrm{e}_0}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}c_\mathrm{e}^2 m_\mathrm{e}\delta n_\mathrm{e}\mathbf{k}. \tag{2.74}$$

V rovnici sa nám tentokrát vyskytuje poruchový člen δn_e, ktorý nám v predošlých odvodeniach tenzoru z rovnice vypadol. Znamená to, že v plazme sa pri tepelnom pohybe mení koncentrácia elektrónov. V takom prípade je nutné použiť rovnicu kontinuity [1]

$$\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\mathrm{e}\mathbf{u}_\mathrm{e}) = 0, \tag{2.75}$$

z ktorej sa dá po aplikácii poruchovej teórie a Fourierovej transformácie získať porucha koncentrácie elektrónov

$$\delta n_\mathrm{e} = \frac{n_{\mathrm{e}_0}}{\omega}\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}. \tag{2.76}$$

Získané δn_e dosadíme do (2.74) a vyjadríme poruchu rýchlostného poľa elektrónov

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E} + \frac{{c_\mathrm{e}}^2}{\omega^2}(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}_\mathrm{e})\mathbf{k}. \tag{2.77}$$

Sériou úprav dospejeme ku vyjadreniu poruchy rýchlosti elektrónov $\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}$:

$$\delta u_{e_k} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k + \frac{{c_\mathrm{e}}^2}{\omega^2}k_k k_l \delta u_{e_l}, \tag{2.78}$$

$$\delta u_{e_l}(\delta_{kl} - \frac{{c_\mathrm{e}}^2}{\omega^2}k_k k_l) = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k,$$

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E}, \tag{2.79}$$

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\mathbf{M}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}, \tag{2.80}$$

kde pre kl-tú zložku $\mathbf{M}$ platí

$$M_{kl} = \delta_{kl} - \frac{{c_\mathrm{e}}^2}{\omega^2}k_k k_l. \tag{2.81}$$

Obmedzíme sa na prípad, kedy vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ bude mať iba x-ovú zložku. Matica $\mathbf{M}$ a matica k nej inverzná $\mathbf{M}^{-1}$ naberajú tvar

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k_x^2\frac{c_\mathrm{e}^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

a

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k_x^2\frac{c_\mathrm{e}^2}{\omega^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

Pre indukciu rovnakým spôsobom pri (2.38) dostaneme tvar

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1})\delta\mathbf{E}, \tag{2.84}$$

no namiesto tvaru matice (2.37) použijeme predpis (2.83), ktorý po dosadení do

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}, \tag{2.85}$$

určuje, ako vyzerá tenzor relatívnej permitivity pre vysokofrekvenčný elektromagnetický komplex vĺn v bezzrážkovej plazme, zloženej z elektrónovej tekutiny s termodynamickou teplotou T_e na nehybnom pozadí tvorenom iónami, bez vplyvu počiatočného magnetického poľa. Tenzor sa už nedá zapísať v tvare (2.41). Problém nastáva s koeficientom S, keďže každý z prvkov na diagonále má iný charakter. Pre analógiu s predošlými odvodeniami si tenzor napíšeme ako

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} S_{xx} & -\mathrm{i}D & 0 \\ \mathrm{i}D & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

kde

$$S_{xx} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}\frac{1}{1 - k_x^2\frac{c_\mathrm{e}^2}{\omega^2}}, \tag{2.87}$$

$$S_{yy} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2},$$

$$D = 0$$

a

$$P = 1 - \frac{\omega_\mathrm{pe}^2}{\omega^2}.$$

Ak prevedieme limitu $T_\mathrm{e} \to 0$ resp. $c_\mathrm{e} \to 0$, Stixove koeficienty v tvare (2.87) musia prejsť na tvar zodpovedajúci chladnej plazme (2.44), čo skutočne nastáva. Podotýkame, že oba koeficienty S_{xx} a S_{yy} prechádzajú v koeficient S. Zároveň treba poznamenať, že prvok S_{yy} je rovný prvku P a tenzor je možné písať i v tvare

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} S_{xx} & -\mathrm{i}D & 0 \\ \mathrm{i}D & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{2.88}$$

2.6 Tepelný pohyb elektrónov a iónov v bezzrážkovej plazme bez vplyvu magnetického poľa

Nakoniec prejdeme k riešeniu, ktoré pripúšťa pohyb a tlak elektrónov a iónov. Výraz pre poruchu rýchlosti elektrónov (2.80), kde (2.83) sme už našli, máme odvodený. Zostáva nám nájsť analógiu pre druhý typ častíc, a to ióny. V predošlom texte sme zistili, že tlak elektrónov spôsobuje zmeny ich koncentrácie. Rovnako tomu bude i v prípade iónov, a preto vo výpočtoch zahrnieme rovnicu kontinuity [1]

$$\frac{\partial n_\mathrm{i}}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\mathrm{i}\mathbf{u}_\mathrm{i}) = 0. \tag{2.89}$$

Do pohybovej rovnici pre ióny pridáme gradient tlaku iónov ∇p_i:

$$m_\mathrm{i} n_\mathrm{i}\frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{i}}{\partial t} + m_\mathrm{i} n_\mathrm{i}(\mathbf{u}_\mathrm{i}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\mathrm{i} = Zen_\mathrm{i}\mathbf{E} - \nabla p_\mathrm{i}. \tag{2.90}$$

Budeme počítať s pokojovým riešením v tvare

$$\mathbf{u}_\mathrm{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad n_\mathrm{i} = n_{\mathrm{i}_0} \quad p_\mathrm{i} = p_{\mathrm{i}0}, \tag{2.91}$$

ktorý sa pripočítaním porúch jednotlivých veličín zmení na

$$\mathbf{u}_\mathrm{i} = \delta\mathbf{u}_\mathrm{i}, \quad \mathbf{E} = \delta\mathbf{E}, \quad n_\mathrm{i} = n_{\mathrm{i}_0} + \delta n_\mathrm{i} \quad p_\mathrm{i} = p_{\mathrm{i}0} + \delta p_\mathrm{i}. \tag{2.92}$$

Nasledujúci postup bude taký, že vyjadríme malú zmenu počtu iónov z rovnice kontinuity (2.89) pomocou Fourierovej transformácie:

$$\delta n_{\mathrm{i}} = \frac{n_{\mathrm{i}_0}}{\omega}\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}_{\mathrm{i}}. \tag{2.93}$$

Poruchu tlaku iónov (2.94) s rýchlosťou zvuku c_{i} sme odvodili rovnakými úpravami ako poruchu tlaku elektrónov (2.69):

$$\delta p_{\mathrm{i}} = c_{\mathrm{i}}^2 m_{\mathrm{i}}\delta n_{\mathrm{i}}. \tag{2.94}$$

Pre c_{i} platí

$$c_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{i}} k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}}, \tag{2.95}$$

kde

$$\gamma_{\mathrm{i}} = \frac{s_{\mathrm{i}}+2}{s_{\mathrm{i}}} \tag{2.96}$$

je polytropný koeficient iónov so stupňom voľnosti s_{i} a T_{i} je ich termodynamická teplota [5]. Dosadením (2.93) do (2.94) a následne (2.94) do (2.90) získame vzťah

$$\delta\mathbf{u}_{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_{\mathrm{i}}\omega}\delta\mathbf{E} + \frac{{c_{\mathrm{i}}}^2}{\omega^2}(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{u}_{\mathrm{i}})\mathbf{k}. \tag{2.97}$$

Uvažovali sme s poruchovým riešením (2.92) a použili sme Fourierovu transformáciu. Sériou úprav vyjadríme poruchu rýchlosti iónov:

$$\delta u_{i_k} = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_{\mathrm{i}}\omega}\delta E_k + \frac{{c_{\mathrm{i}}}^2}{\omega^2}k_k k_l \delta u_{i_l}, \tag{2.98}$$

$$\delta u_{i_l}(\delta_{kl} - \frac{{c_{\mathrm{i}}}^2}{\omega^2}k_k k_l) = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_{\mathrm{i}}\omega}\delta E_k,$$

$$\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{u}_i = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_{\mathrm{e}}\omega}\delta\mathbf{E}, \tag{2.99}$$

$$\delta\mathbf{u}_i = \mathrm{i}\frac{Ze}{m_{\mathrm{e}}\omega}\mathbf{N}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}, \tag{2.100}$$

kde pre kl-tú zložku $\mathbf{N}$ platí

$$N_{kl} = \delta_{kl} - \frac{{c_{\mathrm{i}}}^2}{\omega^2}k_k k_l. \tag{2.101}$$

Zostaneme pri obmedzení na prípad, kedy má vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ iba x-ovú zložku. Matica $\mathbf{N}$ a matica k nej inverzná $\mathbf{N}^{-1}$ naberajú tvar

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 - k_x^2\frac{c_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.102}$$

a

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k_x^2\frac{c_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.103}$$

Výraz pre indukciu naberá tvar (2.56), kde matica $\mathbf{N}^{-1}$ bude po novom naberať tvar (2.103) a matica $\mathbf{M}^{-1}$ tvar (2.83). Podobne ako v predošlom prípade 2.5 tenzor bude potrebné zapísať v tvare

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} S_{xx} & -\mathrm{i}D & 0 \\ \mathrm{i}D & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

kde tentokrát platí

$$S_{xx} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{1 - k_x^2 \frac{c_{\mathrm{e}}^2}{\omega^2}}\right) - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{1 - k_x^2 \frac{c_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2}}\right), \tag{2.104}$$

$$S_{yy} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2},$$

$$D = 0,$$

a

$$P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}.$$

Ak z odvodených koeficientov vypočítame limity $T_{\mathrm{i}} \to 0$ a $T_{\mathrm{e}} \to 0$, resp. $c_{\mathrm{i}} \to 0$ a $c_{\mathrm{e}} \to 0$, Stixove koeficienty prejdú na tvar (2.59), pričom koeficient P zostáva nezmenený.

Rovnako ako v prípade chladnej plazmy (2.59), Stixove koeficienty vykazujú aditivitu vzhľadom ku svojim zložkám, elektrónom a iónom:

$$S_{xx} = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{1 - k_x^2 \frac{c_l^2}{\omega^2}}\right), \tag{2.105}$$

$$S_{yy} = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2},$$

$$D = 0$$

a

$$P = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}} \frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}.$$

Zároveň nastala rovnosť koeficientov S_{yy} a P a tenzor je podobne ako v prípade elektrónovej tekutiny možné zapísať v tvare (2.88).

2.7 Vplyv magnetického poľa na vysokofrekvenčný tenzor permitivity

To, ako magnetické pole vplýva na vysokofrekvečný tenzor permitivity, sme si už odvodili v sekciách 2.3 a 2.4. Uvažovali sme iba s počiatočným konštantným magnetickým poľom pôsobiacim v jednom smere. Magnetické pole však môže mať všeobecne nenulové všetky tri zložky, a zároveň môžu byť tieto zložky závislé na priestorových súradniciach či čase.

Preto sa v nasledujúcich riadkoch pokúsime odvodiť predpis pre tenzor, kde uvažujeme s poľom $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = (B_{0x}(\mathbf{x}), B_{0y}(\mathbf{x}), B_{0z}(\mathbf{x})) = B_0\mathbf{b}(\mathbf{x}) = B_0(b_x(\mathbf{x}), b_y(\mathbf{x}), b_z(\mathbf{x}))$, kde B_0 je konštanta a $b_x(\mathbf{x})$, $b_y(\mathbf{x})$ a $b_z(\mathbf{x})$ sú všeobecne nenulové zložky. Predpokladáme, že zložky magnetického poľa sú funkcie polohového vektoru, no pre jednoduchosť budeme naďalej používať značenie $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}) = B_0\mathbf{b} = B_0(b_x, b_y, b_z)$. Pri hľadaní tenzoru permitivity nemusíme začínať vyjadrením pohybovej rovnice častíc. Využijeme odvodenie v časti 2.3. Podotýkame, že opäť zanedbávame vplyv iónov a tepelný pohyb častíc. V spomínanej časti sme odvodili poruchu rýchlostného poľa elektrónov (2.31):

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E} - \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} \times \mathbf{B}_0.$$

Úpravami vyjadríme vzťah medzi poruchou elektrickej intenzity $\delta\mathbf{E}$ a poruchou rýchlosti $\delta\mathbf{u}_\mathrm{e}$. Zapíšme teda, ako vyzerá k-tá zložka poruchy rýchlostného poľa

$$\delta u_{e_k} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k - \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_0 b_m \epsilon_{klm}\delta u_{e_l}, \tag{2.106}$$

a prehoďme členy s rýchlostnou zložkou na jednu stranu a člen s elektrickou zložkou na druhú stranu:

$$\delta u_{e_l}(\delta_{kl} + \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_0 b_m \epsilon_{klm}) = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta E_k.$$

$$\mathbf{M}\cdot\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}\delta\mathbf{E}, \tag{2.107}$$

kde pre kl-tú zložku $\mathbf{M}$ platí

$$M_{kl} = \delta_{kl} + \mathrm{i}\frac{e}{m_\mathrm{e}\omega}B_0 b_m \epsilon_{klm}. \tag{2.108}$$

Označme symbolom ω_0 výraz

$$\omega_0 = \frac{eB_0}{m_\mathrm{e}}. \tag{2.109}$$

Nech b reprezentuje veľkosť vektoru $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, a teda platí

$$b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2. \tag{2.110}$$

Matica $\mathbf{M}$ v prípade vektoru $\mathbf{B}_0 = B_0(b_x, b_y, b_z)$ prechádza na tvar

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z & -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_y \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z & 1 & \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z \\ \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_y & -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.111}$$

Po vyjadrení inverznej matice ku matici $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}b\right)^2}\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}b_x\right)^2 & -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_x b_y & \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_y - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_x b_z \\ \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_z - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_x b_y & 1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}b_y\right)^2 & -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_x - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_y b_z \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_y - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_x b_z & \mathrm{i}\frac{\omega_0}{\omega}b_x - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 b_y b_z & 1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}b_z\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{2.112}$$

ktorú sme označili $\mathbf{M}^{-1}$ a dosadili do

$$\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = -\frac{\mathrm{ie}}{m_\mathrm{e}\omega}\mathbf{M}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}, \tag{2.113}$$

dostávame vyjadrenie pre poruchu rýchlosti elektrónov, a následne pre elektrickú indukciu:

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \mathrm{e}n_\mathrm{e}\delta\mathbf{x}_\mathrm{e} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_\mathrm{e}}{i\omega}\delta\mathbf{u}_\mathrm{e} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - \frac{e^2 n_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{2.114}$$

Nakoniec sme získali vyjadrenie permitivity

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_0(\mathbf{1} - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}), \tag{2.115}$$

a pre tenzor relatívnej permitivity teda platí

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \mathbf{1} - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}, \tag{2.116}$$

kde $\mathbf{M}^{-1}$ je v tvare (2.112). Relatívnu permitivitu už nie je možné zapísať v tvare (2.41) pomocou Stixových koeficientov. Všetky zložky tenzoru majú nenulovú hodnotu.

Ak položíme zložky b_x a b_y rovné nule a za vektor $\mathbf{b}$ zvolíme jednotkový vektor v smere z, matica $\mathbf{M}^{-1}$ v tvare (2.112) v predpise (2.116) prejde na tvar (2.37).

Kapitola 3

Odvodenie disperznej relácie pre elektromagnetický komplex vĺn v plazme

Pri odvodení disperznej relácie vyjdeme zo sady dvoch Maxwellových rovníc:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\ \mathbf{E} \tag{3.1}$$

a

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{3.2}$$

Ako sme spomínali v prvej kapitole, Maxwellove rovnice vo vákuu a v materiáloch sa líšia. Neuvažujeme totiž iba s voľnými prúdmi, ktoré vznikajú pohybom voľného náboja a posuvným prúdom spôsobeným časovou zmenou elektrického poľa, ale i s prúdmi magnetizačnými a polarizačnými zahrnutých vo veličinách $\mathbf{H}$ a $\mathbf{D}$.

Pri vysokofrekvenčných dejoch v plazme budeme uvažovať s dvoma prúdmi, a to posuvným a polarizačným prúdom. Budeme predpokladať, že permeabilita plazmy je rovná permeabilite vákua. Preto do rovnice (3.2) dosádzame pre magnetické pole vzťah $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, no pre elektrickú indukciu budeme počítať so vzťahom, kde relatívna permeabilita bude v tvare tenzoru $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \mathbf{E}$. Sústava rovníc, ktorú budeme upravovať bude mať teda tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\ \mathbf{E} \tag{3.3}$$

a

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3.4}$$

Po aplikácii linearizácie a Fourierovej transformácie rovnice naberajú tvar:

$$\delta \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \delta \mathbf{E}. \tag{3.6}$$

Všimnime si, že v rovnici (3.6) vystupuje rýchlosť svetla vo vákuu c. Tú sme do rovnice dosadili vďaka platnosti vzťahu

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \tag{3.7}$$

spájajúceho rýchlosť svetla vo vákuu s permitivitou a permeabilitou vo vákuu. Z rovnice (3.5) vidíme, ako vyzerá porucha magnetického poľa, ktorú môžeme dosadiť do (3.6):

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\varepsilon_r} \delta\mathbf{E}. \tag{3.8}$$

Výraz na ľavej strane si môžeme rozpísať po zložkách a upraviť. Pre m-tú zložku výrazu $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E})$ dostaneme:

$$(\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}))_m = \epsilon_{mno} k_n (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E})_o = \epsilon_{mno} k_n \epsilon_{ors} k_r E_s = \tag{3.9}$$

$$= \epsilon_{omn} \epsilon_{ors} k_r k_n E_s = \delta_{mr} \delta_{ns} k_r k_n E_s - \delta_{ms} \delta_{nr} k_r k_n E_s = k_m (k_s \delta E_s) - k_r^2 \delta E_m,$$

a teda platí

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{E}) - k^2 \delta\mathbf{E}, \tag{3.10}$$

kde k predstavuje veľkosť vlnového vektora $\mathbf{k}$. Vzťah je vlastne reprezentáciou známej vety s neformálnym prívlastkom *BAC-CAB*, ktorú je možné dohľadať napr. v skriptách [13].

Vzťah (3.10) dosadíme do (3.8):

$$-c^2 k^2 \delta\mathbf{E} + c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{E})\mathbf{k} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon_r} \delta\mathbf{E} = 0. \tag{3.11}$$

Rovnicu (3.11) prepíšeme do elegantnejšieho tvaru

$$(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}) \delta\mathbf{E} = 0, \tag{3.12}$$

kde $\mathbf{K}$ je matica v tvare

$$\mathbf{K} = c^2 \begin{pmatrix} -(k_y^2 + k_z^2) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & -(k_x^2 + k_z^2) & k_z k_y \\ k_x k_z & k_y k_z & -(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Ak chceme, aby sústava (3.12) mala pre $\delta\mathbf{E}$ nenulové riešenie, musíme položiť podmienku

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}) = 0. \tag{3.14}$$

V matici $\mathbf{K}$ máme teda zahrnuté zložky vlnového vektoru a vo výraze $\omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}$ uhlovú frekvenciu. Samotný tenzor permitivity dosadíme podľa toho, či uvažujeme vplyv magnetického poľa, vplyv iónov či tepelný pohyb častíc.

Odvodili sme všeobecnú reláciu (3.14). Na prvý pohľad je jasné, že jej predpis je komplikovaný a rozbor riešenia nie je úplne triviálny. Zložitosť matice $\mathbf{K}$ sa odvíja od toho, či má alebo nemá vlnový vektor $\mathbf{k}$ nulové zložky a zložitosť tenzoru od toho, či zanedbávame alebo nezanedbávame konkrétne vplyvy v plazme, ako sme sa mohli presvedčiť i v celej predošlej kapitole.

Pri elektromagnetických vlnách sú dôležité ešte dva vzťahy uvedené v literatúre [1],

$$\delta\mathbf{B} \perp \mathbf{k} \tag{3.15}$$

a

$$\delta\mathbf{B} \perp \delta\mathbf{E}. \tag{3.16}$$

Prvý z nich získame, ak na Maxwellovu rovnicu

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{3.17}$$

aplikujeme Fourierovu transformáciu a dosadíme poruchový člen $\delta\mathbf{B}$ resp. pri nenulovom magnetickom poli $\mathbf{B}_0$ súčet $\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$:

$$\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{B} = 0, \tag{3.18}$$

a teda $\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{B} = 0$. Vzťah (3.16) potom plynie z rovnice (3.6). Porucha magnetického poľa $\delta\mathbf{B}$ v elektromagnetickej vlne je teda vždy na vlnový vektor $\mathbf{k}$ a na poruchu elektrického poľa $\delta\mathbf{E}$ kolmá.

V nasledujúcom texte sa sústredime na niektoré z konkrétnych prípadov disperzných relácii. Dopodrobna sa budeme zaoberať vlnami šíriacimi sa kolmo na konštatné magnetické pole, no najprv sa pozrieme na tvary relácii pre vlny šíriace sa plazmou bez magnetického poľa a na vlny šíriace sa pozdĺžne ku magnetickému poľu v plazme.

3.1 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa chladnou plazmou bez magnetického poľa a zrážok na nehybnom iónovom pozadí

Predpokladajme, že vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ patrí vlne šíriacej sa iba v jednom smere pozdĺž osi x. V takom prípade naberá matica (3.13) tvar

$$\mathbf{K} = c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_x^2 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Nenulové zložky matice (3.19) je možné nájsť iba na jej diagonále. Ak chceme nájsť disperznú reláciu pre vlnu šíriacu sa pozdĺž x bezzrážkovou plazmou, v ktorej predpokladáme nulové magnetické pole, žiaden vplyv iónov a zároveň nulovú teplotu, musíme do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

dosadiť upravený tvar $\mathbf{K}$ (3.19) a tenzor permitivity (2.41) so Stixovými koeficientami v tvare (2.44):

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c^2 k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c^2 k_x^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.20}$$

Matica má iba tri riadky a tri stĺpce, preto determinant môžeme riešiť jednoducho Sarrusovým pravidlom (popísaným napr. v [12]). Dostávame

$$(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2)(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c^2 k_x^2)^2 = 0. \tag{3.21}$$

Vynulovaním prvej zátvorky v (3.21), že druhá mocnina frekvencie prechádzajucej vlny môže naberať tvar

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2. \tag{3.22}$$

Tým sme zistili prvé možné riešenie disperznej relácie. Plazmová frekvencia sa rovná vlastnej oscilačnej frekvencii elektrónov, plazmovej frekvencii. V prípade, že je druhá zátvorka v (3.21) rovná nule, vzťah medzi uhlovou frekvenciou vlny a veľkosťou vlnového vektoru $k = k_x$ môžeme zapísať ako

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + c^2 k^2. \tag{3.23}$$

Podľa knihy [1] sa takýto typ vlny nazýva *riadna vlna*, po anglicky *Ordinary wave*, odkiaľ pochádza jej označenie *O*.

3.2 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa chladnou plazmou bez zrážok na nehybnom iónovom pozadí pozdĺžne ku konštantnému magnetickému poľu v plazme

Predpokladajme, že máme vlnový vektor $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$ vlny šíriacej sa iba v jednom smere pozdĺž osi z, v rovnakom smere, v akom pôsobí konštantné magnetické pole $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

je potrebné dosadiť dosadiť upravený tvar $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = c^2 \begin{pmatrix} -k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

a tenzor permitivity (2.41) so Stixovými koeficientami v tvare (2.42):

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2 k_z^2 & \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega} \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega} \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2 k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.25}$$

Po vypočítaní determinantu zisťujeme, že pre disperznú reláciu platí

$$\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2 k_z^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2 k_z^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2\right) - \left(\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega} \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}\right)^2 = 0. \tag{3.26}$$

Existujú dve riešenia rovnice (3.26) pre druhú mocninu veľkosti vlnového vektora $k = k_x$, ktoré našiel program *Mathematica 10.* Prvé z riešení je rovné

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1 + \omega_{\mathrm{ce}}/\omega}\right) \tag{3.27}$$

a druhé

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1 - \omega_{\mathrm{ce}}/\omega}\right). \tag{3.28}$$

Podľa knihy [1] sa jedná o ľavotočivú vlnu L (z anglického *Left*) vlnu s indexom lomu

$$\mathcal{N}_L^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1 + \omega_{\mathrm{ce}}/\omega} \tag{3.29}$$

a o pravotočivú vlnu R (*z anglického Right*) vlnu s indexom lomu

$$\mathcal{N}_R^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2/\omega^2}{1 - \omega_{\mathrm{ce}}/\omega}. \tag{3.30}$$

Ide o ľavotočivo a pravotočivo polarizovanú kruhovú vlnu. Pravotočivosť a ľavotočivosť určujeme podľa vektoru elektrického poľa pri pohľade v smere magnetického poľa. Rezonančná frekvencia $\mathcal{N}_R \to \infty$ nastáva iba pre R vlnu pri frekvencii $\omega = \omega_{\mathrm{ce}}$. L vlna rezonancii nepodlieha. Medzná frekvencia ľavotočivej vlny, teda frekvencia pre ktorú platí $\mathcal{N}_L \to 0$, podlieha predpisu

$$\omega_L = -\frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{ce}} - \sqrt{\omega_{\mathrm{ce}}^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2}\right). \tag{3.31}$$

Pre $\mathcal{N}_R \to 0$ zas platí

$$\omega_R = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{ce}} + \sqrt{\omega_{\mathrm{ce}}^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2}\right). \tag{3.32}$$

Pred odmocninou sme vo výrazoch (3.31) a (3.32) použili znamienko plus, aby bola frekvencia vždy kladná, rovnako ako v učebnici [1].

Na záver ešte poznamenáme, že ak budeme riešiť rovnicu (3.26) vzhľadom k uhlovej frekvencii prechádzajúcej vlny, dostaneme ešte jedno riešenie nezávislé na vlnovom vektore, a to $\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2$. Jedná sa o oscilácie na plazmovej frekvencii elektrónov.

3.3 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa chladnou plazmou bez zrážok na nehybnom iónovom pozadí kolmo na konštantné magnetické pole v plazme

Predpokladajme, že vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ vlny šíriacej sa iba v jednom smere pozdĺž osi x je kolmý na konštantné magnetické pole $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ pôsobiace v smere osi z. Do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

je potrebné dosadiť dosadiť upravený tvar $\mathbf{K}$ (3.19) a tenzor permitivity (2.41) so Stixovými koeficientami v tvare (2.42):

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} & \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c^2k_x^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.33}$$

Po vypočítaní determinantu zisťujeme, že pre disperznú reláciu platí

$$\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}\right)\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - c^2k_x^2\right)\left(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 - c^2k_x^2\right) - \left(\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}\right)^2 = 0. \tag{3.34}$$

Riešenie rovnice pre druhú mocninu veľkosti vektoru $k = k_x$ nám vypočítal program *Mathematica 10*. Prvé z riešení je rovné

$$k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2), \tag{3.35}$$

a pre uhlovú frekvenciu vlny teda platí

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + c^2k^2.$$

S týmto vzťahom sme sa už stretli pri odvodení disperznej relácie vlny bez vplyvu počiatočného magnetického poľa a nazvali ho riadna vlna (3.23). Znamená to, že vlna sa šíri plazmou kolmo na pole $\mathbf{B}_0$, akoby neexistovalo, resp. by bolo rovné nule $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$. Druhá mocnina indexu lomu riadnej vlny je rovná

$$\mathcal{N}_0^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}. \tag{3.36}$$

Porucha elektrického poľa $\delta\mathbf{E}$ kmitá rovnobežne s vonkajším magnetickým poľom $\mathbf{B}_0$ a kolmo na poruchu magnetického poľa $\delta\mathbf{B}$. Ak je $\omega < \omega_{\mathrm{pe}}$, vlna sa prostredím nešíri, index lomu je komplexný. V prípade $\omega = \omega_{\mathrm{pe}}$ je index lomu rovný nule. Pre $\omega > \omega_{\mathrm{pe}}$ naberá hodnoty medzi nulou a jedničkou. Pre $\omega \to \infty$ je index lomu rovný jednej, čo zodpovedá indexu lomu vákua, teda vlna sa šíri plazmou rovnako ako by sa šírila vákuom. Index lomu je zároveň vždy konečný a pri riadnej vlny nikdy nedochádza k rezonanciám ako to popisuje i literatúra [1].

S indexom lomu riadnej vlny sme sa stretli už aj pri odvodení tenzoru permitivity (2.41). Druhá mocnina indexu lomu riadnej vlny $\mathcal{N}_O^2$ je rovná Stixovmu koeficientu P. Pristúpme k druhému výsledku rovnice (3.34). Ten má tvar

$$k^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2\omega_{\mathrm{ce}}^2 - 2\omega^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^4}{c^2\omega^2 - c^2\omega_{\mathrm{ce}}^2 - c^2\omega_{\mathrm{pe}}^2}. \tag{3.37}$$

Vynásobme rovnicu (3.37) druhou mocninou rýchlosti svetla c^2 a podeľme druhou mocninou uhlovej frekvencie prechádzajúcej vlny ω^2. Dostaneme výraz pre index lomu vlny

$$\mathcal{N}_X^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_{\mathrm{ce}}^2 - 2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^4}{\omega^2}}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{ce}}^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{ce}}^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2}, \tag{3.38}$$

ktorú nazývame *mimoriadna vlna*, po anglicky *Extraordinary wave*, a ktorú budem značiť symbolom X [1]. Výraz (3.38) ešte upravíme do tvaru

$$\mathcal{N}_X^2 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_h^2}. \tag{3.39}$$

Symbolom ω_h sme označili druhú mocninu *hornej hybridnej rezonancie* definovanú predpisom

$$\omega_h^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{ce}}^2. \tag{3.40}$$

Ak $\mathcal{N}_X \to \infty$, platí práve $\omega = \omega_h$ teda uhlová frekvencia je rovná hornej hybridnej rezonancii. Podľa [1] pri tejto frekvencii vlna nepostupuje, a ide iba o oscilácie elektrónov na hornej hybridnej frekvencii vyvolané elektromagnetickou vlnou. Namiesto klasických plazmových oscilácii na frekvencii ω_{pe} je frekvencia týchto oscilácii väčšia, pretože k pôsobeniu elektrickej sily sa pridáva ešte magnetické pole. Častice totiž vykonávajú Larmorovu rotáciu okolo $\mathbf{B}_0$.

Index lomu mimoriadnej vlny ide limitne k nule $\mathcal{N}_X \to 0$, ak platí

$$\omega_L = -\frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{ce}} - \sqrt{\omega_{\mathrm{ce}}^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2}\right) \tag{3.41}$$

alebo

$$\omega_R = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{ce}} + \sqrt{\omega_{\mathrm{ce}}^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2}\right). \tag{3.42}$$

S týmito frekvenciami sme sa už stretli pri disperzných reláciách pre ľavotočivú a pravotočivú vlnu šíriacimi sa pozdĺžne ku magnetickému poľu s veľkosťou B_0 a nazvali sme ich pravá a ľavá medzná frekvencia. Medzi indexom lomu mimoriadnej vlny a indexami lomu ľavotočivej a pravotočivej vlny totiž platí podľa [1] vzťah

$$\mathcal{N}_X^2 = \frac{2\mathcal{N}_L^2\mathcal{N}_R^2}{\mathcal{N}_L^2 + \mathcal{N}_R^2}. \tag{3.43}$$

Druhá mocnina indexu lomu mimoriadnej vlny $\mathcal{N}_X^2$ je rovná Stixovmu koeficientu X, ktorého definíciu sme uviedli v predošlej kapitole.

Mimoriadna vlna sa šíri v intervale $(\omega_L, \omega_H) \cup (\omega_R, \infty)$ [1]. Index lomu mimoriadnej vlny (3.39) je narozdiel od indexu lomu riadnej vlny (3.36) závislý na cyklotrónovej frekvencii elektrónovej ω_{ce}, a je teda ovplyvnený prítomnosťou magnetického poľa $\mathbf{B}_0$.

Ukážeme si ešte, ako vyzerajú disperzné relácie riadnej a mimoriadnej vlny v prípade, že vlnový vektor má tvar $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$, kde predpokladáme nenulovosť zložiek k_x a k_y. Tvar disperzných relácii sme opäť zistili tak, že sme do

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

dosadili tenzor permitivity (2.41) so Stixovými koeficientami v tvare (2.42), no namiesto matice $\mathbf{K}$ v tvare (3.19), tentokrát matica $\mathbf{K}$ (3.13) nabrala predpis

$$\mathbf{K} = c^2 \begin{pmatrix} -k_y^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & -k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Riešenie sme získali opäť pomocou programu *Mathematica 10.* Pre riadnu vlnu platí

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + c^2k^2, \tag{3.45}$$

a pre mimoriadnu vlnu platí

$$k^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2\omega_{\mathrm{ce}}^2 - 2\omega^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^4}{c^2\omega^2 - c^2\omega_{\mathrm{ce}}^2 - c^2\omega_{\mathrm{pe}}^2}, \tag{3.46}$$

čo sú úplne identické výrazy, aké sme odvodili predtým, akurát pre druhú mocninu veľkosti vlnového vektora $\mathbf{k}$ platí

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \tag{3.47}$$

Okrem x-ovej zložky vektoru $\mathbf{k}$ sme teda museli počítať ešte s nenulovou y-ovou zložkou. Vektor $\mathbf{k}$ je stále kolmý na počiatočné magnetické pole $\mathbf{B}_0$.

V predošlej kapitole sme sa mimo iného zaoberali aj tým, ako tekutina zložená z iónov a tepelný pohyb častíc ovplyvňuje tvar tenzoru permitivity. V ďalšom texte nás bude zaujímať, ako ovplyvňujú šírenie vĺn plazmou práve tieto javy.

3.4 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa chladnou plazmou zloženej z elektrónovej a iónovej tekutiny bez zrážok kolmo na konštantné magnetické pole

Pri odvodení disperznej relácie, v ktorej zohľadňujeme elektróny aj ióny, budeme postupovať analogicky ako v predošlom texte. Predpokladajme teda opäť, že vlnový vektor

$\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ vlny šíriacej sa iba v jednom smere pozdĺž osi x je kolmý na konštantné magnetické pole $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ pôsobiace v smere osi z. Do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

je potrebné dosadiť tvar matice $\mathbf{K}$ (3.19), a tenzor permitivity (2.41) budeme namiesto Stixových koeficientov v tvare (2.42) počítať s koeficientami (2.58). V takom prípade disperznú reláciu odvodzujeme z podmienky

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} & \mathrm{i}\frac{\omega_{\rm ce}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \mathrm{i}\frac{\omega_{\rm ci}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pi}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{\omega_{\rm ce}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} + \mathrm{i}\frac{\omega_{\rm ci}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pi}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} & \omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} - c^2 k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 - \omega_{\rm pi}^2 - c^2 k_x^2 \end{pmatrix} = 0, \tag{3.48}$$

ktorú ľahko prepíšeme do tvaru

$$\left(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}}\right) \cdot \left(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} - c^2 k_x^2\right) \cdot \tag{3.49}$$

$$\cdot \left(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 - \omega_{\rm pi}^2 - c^2 k_x^2\right) - \left(\frac{\omega_{\rm ce}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \frac{\omega_{\rm ci}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pi}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}}\right)^2 = 0.$$

Pri riešení rovnice pre druhú mocninu veľkosti vektoru $k = k_x$ nám opäť pomohol program *Mathematica 10*. Prvé z riešení je rovné

$$k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2 - \omega_{\rm pi}^2) \tag{3.50}$$

resp.

$$\omega^2 = \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2 + c^2 k^2. \tag{3.51}$$

K disperznej relácii pre riadnu vlnu (3.23) sa nám pridal ešte člen $\omega_{\rm pi}^2$. Pozrieme sa na to, ako sa oproti (3.36) zmenil index lomu:

$$\mathcal{N}_0^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2}{\omega^2}. \tag{3.52}$$

Pre index lomu stále platí, že je konečný pre všetky veľkosti uhlovej frekvencie ω, no medzná frekvencia, pri ktorej platí $\mathcal{N}_0 \to 0$, je narozdiel od $\omega_{\rm pe}^2$ rovná $\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2$. K disperznej relácii pre riadnu vlnu prispieva vplyv iónov prostredníctvom plazmovej frekvencie iónov.

Pristúpme k druhému riešeniu rovnice (3.49) pre veľkosť vlnového vektoru k, ktoré má značne komplikovanejší tvar

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\omega^6 - (\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2 - \omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2)^2 - \omega^4(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + 2(\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2))}{\omega^4 + \omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pi}^2) - \omega^2(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)} + \tag{3.53}$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\omega^2(2\omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + (\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + 2\omega_{\rm pi}^2))}{\omega^4 + \omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pi}^2) - \omega^2(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)}.$$

Ak vynásobime rovnicu (3.53) druhou mocninou rýchlosti svetla c^2 a podelíme druhou mocninou uhlovej frekvencie prechádzajúcej vlny ω^2 dostaneme výraz pre index lomu mimoriadnej vlny

$$\mathcal{N}_X^2 = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^6 - (\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2 - \omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2)^2 - \omega^4(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + 2(\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2))}{\omega^4 + \omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pi}^2) - \omega^2(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)} + \tag{3.54}$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2(2\omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + (\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + 2\omega_{\rm pi}^2))}{\omega^4 + \omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pi}^2) - \omega^2(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2)}.$$

Oproti výrazu (3.39) je výraz pre index lomu značne zložitejší, no ak položíme $\omega_{\rm pi} \to 0$ a $\omega_{\rm ci} \to 0$, skutočne získame verziu (3.39), kde zanedbávame vplyv iónov.

Sústredíme sa na limitné prípady rezonancií $\mathcal{N}_{\mathcal{X}} \to \infty$ a medznej frekvencie $\mathcal{N}_{\mathcal{X}} \to 0$. Prípad $\mathcal{N}_{\mathcal{X}} \to \infty$ získame, ak položíme výraz v menovateli (3.54)

$$\omega^4 + \omega_{\rm ci}^2\omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm ce}^2(\omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pi}^2) - \omega^2(\omega_{\rm ce}^2 + \omega_{\rm ci}^2 + \omega_{\rm pe}^2 + \omega_{\rm pi}^2) \to 0. \tag{3.55}$$

V programe *Mathematica 10* sme zistili, že podmienka (3.55) platí pre $\omega = \omega_h$ spĺňajúce vzťah

$$\omega_{\rm pe}^2 + \frac{\omega_h^2 - \omega_{\rm ce}^2}{\omega_{\rm ci}^2 - \omega_h^2}(\omega_h^2 - \omega_{\rm ci}^2 - \omega_{\rm pi}^2) = 0. \tag{3.56}$$

Podmienku sme vyriešili vzhľadom ku $\omega_{\rm pe}^2$ a zapísali ju v implicitnom tvare, nakoľko explicitný tvar pre ω^2 bol príliš zložitý. Aplikáciou limít $\omega_{\rm pi} \to 0$ a $\omega_{\rm ci} \to 0$ na (3.56) dostávame podľa očakávaní vzťah pre hornú hybridnú rezonanciu (3.40). Existencia iónov a ich pohyb v elektrickom a magnetickom poli teda ovplyvňuje tvar hornej hybridnej rezonancie.

Ostáva nám ešte prešetriť prípad $\mathcal{N}_{\mathcal{X}} \to 0$. Podmienku sme opäť kvôli elegantnosti riešenia vyriešili vzhľadom ku $\omega_{\rm pe}^2$. Spomínaná limita platí pre dve prípady frekvencie $\omega = \omega_L$ a $\omega = \omega_R$ spĺňajúce

$$\omega_{\rm pe}^2 + \frac{(\omega_L + \omega_{\rm ce})(\omega_L^2 - \omega_L\omega_{\rm ci} - \omega_{\rm pi}^2)}{\omega_{\rm ci} - \omega_L} = 0 \tag{3.57}$$

a

$$\omega_{\rm pe}^2 + \frac{(\omega_R - \omega_{\rm ce})(\omega_R^2 + \omega_R\omega_{\rm ci} - \omega_{\rm pi}^2)}{-\omega_{\rm ci} - \omega_R} = 0. \tag{3.58}$$

Frekvencie sme si pracovne označili ako ω_L a ω_R, v analógii s ľavou a pravou medznou frekvenciou (3.31) a (3.32), no či sa skutočne jedná o medzné frekvencie ľavotočivej a pravotočivej vlny za pôsobenia oboch plazmových tekutín, elektrónovej a iónovej, a či sa zachováva vzťah (3.43) sa presvedčíme odvodením disperznej relácie pre tieto vlny.

Nech teda pre vlnový vektor platí $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$. Do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

dosadzujeme maticu (3.24) a tenzor permitivity (2.41) so Stixovými koeficientami v tvare (2.58). Podmienka naberá tvar

$$\left(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2\frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2\frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} - c^2k_z^2\right)\cdot\left(\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2\frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}} - \omega_{\rm pi}^2\frac{1}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}} - c^2k_z^2\right)\cdot \tag{3.59}$$

$$\cdot\left(\omega^2-\omega_{\rm pe}^2-\omega_{\rm pi}^2\right)-\left(\frac{\omega_{\rm ce}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ce}^2}{\omega^2}}-\frac{\omega_{\rm ci}}{\omega}\frac{\omega_{\rm pi}^2}{1-\frac{\omega_{\rm ci}^2}{\omega^2}}\right)^2=0.$$

Existujú dve riešenia pre druhú mocninu veľkosti vlnového vektora $k=k_z$, ktoré našiel program *Mathematica 10.* Prvé z riešení je rovné

$$k^2=\frac{\omega^3+\omega^2(\omega_{\rm ce}-\omega_{\rm ci})+\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2-\omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2-\omega(\omega_{\rm ce}\omega_{\rm ci}+\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm pi}^2)}{\omega(\omega+\omega_{\rm ce})(\omega-\omega_{\rm ci})},\tag{3.60}$$

a druhé

$$k^2=\frac{\omega^3+\omega^2(-\omega_{\rm ce}+\omega_{\rm ci})-\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2-\omega(\omega_{\rm ce}\omega_{\rm ci}+\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm pi}^2)}{\omega(\omega-\omega_{\rm ce})(\omega+\omega_{\rm ci})}.\tag{3.61}$$

Odpovedajúce indexy lomu zapíšeme ako

$$\mathcal{N}_L^2=\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\frac{\omega^3+\omega^2(\omega_{\rm ce}-\omega_{\rm ci})+\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2-\omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2-\omega(\omega_{\rm ce}\omega_{\rm ci}+\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm pi}^2)}{\omega(\omega+\omega_{\rm ce})(\omega-\omega_{\rm ci})}\tag{3.62}$$

a

$$\mathcal{N}_R^2=\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\frac{\omega^3+\omega^2(-\omega_{\rm ce}+\omega_{\rm ci})-\omega_{\rm ci}\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm ce}\omega_{\rm pi}^2-\omega(\omega_{\rm ce}\omega_{\rm ci}+\omega_{\rm pe}^2+\omega_{\rm pi}^2)}{\omega(\omega-\omega_{\rm ce})(\omega+\omega_{\rm ci})}.\tag{3.63}$$

Úpravou zlomku (3.62) môžeme dospieť ku vzťahu

$$\mathcal{N}_L^2=1-\sum_{l=\rm e,i}\frac{\frac{\omega_{{\rm p}l}^2}{\omega^2}}{1-\frac{q_lB}{m_l}}\tag{3.64}$$

a úpravou zlomku (3.63) ku vzťahu

$$\mathcal{N}_R^2=1-\sum_{l=\rm e,i}\frac{\frac{\omega_{{\rm p}l}^2}{\omega^2}}{1+\frac{q_lB}{m_l}}.\tag{3.65}$$

Dostali sme teda disperzné relácie pre ľavotočivú a pravotočivú vlnu a zároveň sme zistili, že pre komponenty v plazme zahrnuté v indexe lomu L a R vlny platí aditivita. Zo zápisu (3.64) a (3.65) už je jasne vidieť, že ak položíme limity $\omega_{\rm pe}\to 0$ a $\omega_{\rm pi}\to 0$, dostaneme tvary indexov lomu pre L a R vlnu (3.29) a (3.30), v ktorých sme plazmu aproximovali elektrónovou tekutinou a s iónovou tekutinou sme neuvažovali.

Zaujímavý je prípad limity $\mathcal{N}_L\to\infty$. V predošlom texte sme spomínali, že ak $\mathcal{N}_R\to\infty$, rezonančná frekvencia pre elektróny nastáva pre $\omega_{\rm ce}$. Táto platnosť sa zachováva i v prípade $\mathcal{N}_R\to\infty$ pre index lomu R vlny $\mathcal{N}_R$ v tvare (3.65). Ak je index lomu L vlny $\mathcal{N}_R$ v tvare (3.29), rezonančná frekvencia pre L vlnu neexistuje, no pre tvar (3.64) to už neplatí. Rezonančná frekvencia môže nastať pre $\omega=\omega_{\rm ci}$. Vlna je absorbovaná na frekvencii Larmorovho pohybu iónov.

Tento fakt je celkom zrejmý, keď si uvedomíme, že pri Larmorovom pohybe sa elektróny a ióny pohybujú opačným smerom. Pri R vlne môžeme síce elektróny považovať za „pravotočivé“, no ióny sa otáčajú presne opačným smerom a môžeme ich naopak označiť za „ľavotočivé“. Pokiaľ sa teda vektor elektrického poľa stáča opačne, než rotujú elektróny, rezonančná frekvencia pre L vlnu môže stále nastať, a to práve ak má vlna frekvenciu cyklotrónovej frekvencie iónov $\omega_{\rm ci}$, frekvenciu Larmorovho pohybu iónov.

Vráťme sa ale k riešeniam, ktoré vychádzajú pre $\mathcal{N}_R\to 0$ a $\mathcal{N}_L\to 0$. Tie skutočne prechádzajú na medzné frekvencie v tvare (3.57) a (3.58), ktoré sme zistili pre X vlnu.

Pokiaľ dosadíme vzťah (3.54) pre X vlnu podliehajúcu vplyvu elektrónovej i iónovej tekutiny, a vzťahy pre L a R vlnu, (3.64) a (3.65), do

$$\mathcal{N}_X^2 = \frac{2\mathcal{N}_L^2\mathcal{N}_R^2}{\mathcal{N}_L^2 + \mathcal{N}_R^2},$$

ktorý platil pre X vlnu podliehajúcu iba vplyvu elektrónovej tekutiny, zistíme, že skutočne platí.

Na záver ešte dodáme, že pokiaľ sme vyriešili (3.59) vzhľadom ku frekvencii ω, dostali sme riešenie nezávislé na vlnovom vektore $\mathbf{k}$ v tvare

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2. \tag{3.66}$$

Ku riešeniu $\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2$ sa pridal člen ω_{pi}^2. Ak by sme položili limitne $\omega_{\mathrm{pi}}^2 \to 0$, dostali by sme podľa očakávaní $\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2$.

Tým sme skompletizovali analógiu medzi odvodeniami v častiach 3.3 a 3.4.

3.5 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa plazmou s tepelným pohybom elektrónov bez zrážok a magnetického poľa

V nasledujúcich odstavcov zistíme, ako je zahrnutý tlakový člen do disperznej relácie elektromagnetického komplexu. Začneme však najprv tým, že disperznú reláciu odvodíme pre vlny šíriace sa bez magnetického poľa $\mathbf{B}$. Položíme teda v Maxwellovej rovnici

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{3.67}$$

$\mathbf{B} = 0$ resp. $\mathbf{H} = 0$ a dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{3.68}$$

Aplikáciou Fourierovej transformácie (1.18) na predošlú rovnicu a dosadením poruchového členu $\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}$ získame rovnosť

$$-\,\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \delta\mathbf{E} = 0. \tag{3.69}$$

Musí teda platiť

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r \delta\mathbf{E} = 0. \tag{3.70}$$

Aby mala rovnica (3.70) nenulové riešenie, stačí, ak položíme determinant tenzoru permitivity (2.86) so Stixovými koeficientami v tvare (2.87), ktorý sme odvodili v 2.5, a zahrnuli sme v ňom tlakový člen, rovný nule:

$$\det \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_r = \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1 - k^2\frac{c_{\mathrm{e}}{}^2}{\omega^2}}\right)\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\right)^2 = 0. \tag{3.71}$$

Tenzor je závislý na uhlovej frekvencii ω a vlnovom vektore vlny $\mathbf{k}$, získali sme teda disperznú reláciu. Vzhľadom na jednoduchosť vzorca (3.71) je možné ľahko zistiť závislosti frekvencie ω na vlnovom vektore $\mathbf{k}$, ktoré podmienku nulovosti spĺňajú. Prvú z nich

$$\omega = \omega_{\mathrm{pe}}, \tag{3.72}$$

získame položením

$$\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\right)^2 = 0 \tag{3.73}$$

a je rovná plazmovej frekvencii elektrónov.

Z rovnosti

$$\left(1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1-k^2\frac{{c_{\mathrm{e}}}^2}{\omega^2}}\right)=0. \tag{3.74}$$

zas získame vzťah

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+{c_{\mathrm{e}}}^2k^2. \tag{3.75}$$

Relácia (3.75) podľa literatúry [1] zodpovedá *plazmovej vlne*. V prípade $\omega_{\mathrm{pe}}^2 >> {c_{\mathrm{e}}}^2k^2$ prechádza na plazmové oscilácie $\omega=\omega_{\mathrm{pe}}$. Ak naopak platí $\omega_{\mathrm{pe}}^2 << {c_{\mathrm{e}}}^2k^2$, dostávame lineárnu závislosť frekvencie prechádzajúcej vlny ω na veľkosti jej vlnového vektora k,

$$\omega=c_{\mathrm{e}}k, \tag{3.76}$$

kde smernicou je rýchlosť zvuku elektrónov c_{e}.

Predpokladajme teraz, že pracujeme s elektromagnetickými vlnami a porucha magnetického poľa nebude pri prechode vlny plazmou nulová. Budeme postupovať obvyklým spôsobom v tejto kapitole a disperznú reláciu zistíme z podmienky

$$\det(\mathbf{K}+\omega^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_r)=0,$$

do ktorej je potrebné dosadiť tvar matice $\mathbf{K}$ (3.19), a v tenzore permitivity (2.86) budeme počítať so Stixovými koeficientami v tvare (2.87). Dostaneme

$$\det\begin{pmatrix}\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1}{1-k^2\frac{{c_{\mathrm{e}}}^2}{\omega^2}} & 0 & 0\\ 0 & \omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-c^2k_x^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-c^2k_x^2\end{pmatrix}=0, \tag{3.77}$$

resp.

$$\left(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1}{1-k^2\frac{{c_{\mathrm{e}}}^2}{\omega^2}}\right)(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-c^2k^2)^2=0. \tag{3.78}$$

Podotýkame, že stále počítame s vlnovým vektorom v tvare $\mathbf{k}=(k_x,0,0)$, s veľkosťou $k_x=k$. Anulovaním prvej zátvorky v (3.78) dostaneme disperznú reláciu plazmovej vlny (3.75), a anulovaním druhej disperznú reláciu riadnej vlny (3.23).

Spomeňme si, že podmienku (3.77) sme získali vďaka tomu, že nutne musela platiť rovnica.

$$\begin{pmatrix}\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1}{1-k^2\frac{{c_{\mathrm{e}}}^2}{\omega^2}} & 0 & 0\\ 0 & \omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-c^2k_x^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-c^2k_x^2\end{pmatrix}\delta\mathbf{E}=0. \tag{3.79}$$

Ak do uvedenej rovnice dosadíme predpis pre plazmovú vlnu, zistíme že nenulová je x-ová zložka poruchy elektrickej intenzity. Vlna sa teda šíri pozdĺžne ku elektrickému poľu.

Pri dosadení disperznej relácie (3.23) pre riadnu vlnu do (3.79) naopak musí platiť, že x-ová zložka poruchy intenzity je nulová. Vlna sa šíri kolmo na elektrické pole.

Plazmou sa teda môže šíriť vlna plazmová v smere elektrického poľa alebo elektromagnetická riadna vlna v smere kolmom na elektrické pole.

3.6 Disperzná relácia pre vlny šíriace sa bezzrážkovou plazmou so zanedbaním vplyvu iónov a tepelného pohybu elektrónov v rovine magnetického poľa

V tejto časti rozoberieme, ako sa šíri elektromagnetická vlna v rovine (x, y), v ktorej pôsobí aj magnetické pole v plazme.

Predpokladajme, že vlnový vektor má tvar $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ a pre magnetické pole platí $\mathbf{B}_0 = B_0(b_x, b_y, 0)$. Do disperznej relácie

$$\det(\mathbf{K} + \omega^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r) = 0$$

je potrebné dosadiť dosadiť upravený tvar $\mathbf{K}$ (3.44) a permitivitu (2.116) s maticou $\mathbf{M}^{-1}$ v tvare (2.112), kde sme položili $b_z = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -c^2k_y^2 + \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1-b_x^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & c^2k_xk_y + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{b_xb_y\omega_0^2}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_y\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \\ c^2k_xk_y + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{b_xb_y\omega_0^2}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -c^2k_x^2 + \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2 \frac{1-b_y^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_x\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_y\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_x\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -c^2(k_x^2+k_y^2) + \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \end{pmatrix} = 0. \tag{3.80}$$

Na výpočet determinantu sme použili softvér *Mathematica 10.* Následne sme ho využili i na výpočet disperznej relácie. Program však nebol schopný vypočítať disperznú reláciu vzhľadom ku ω a riešenia ku k_x a k_y boli príliš komplikované. Najvhodnejšie bolo riešiť rovnicu (3.80) vzhľadom ku rýchlosti svetla c. Výsledkom boli dve disperzné relácie, ktoré zapíšeme v implicitnom tvare. Tvar relácii sme za použitia spomínaného programu upravili na čo najjednoduchší tvar. Prvá z nich spĺňa vzťah

$$\begin{aligned} c^2 - ((\omega(2k_y^2\omega^5 - 2b_x^2k_y^2\omega^3\omega_0^2 - 2b_y^2k_y^2\omega^3\omega_0^2 - 4k_y^2\omega^3\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2b_xb_yk_xk_y\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \\ + b_x^2k_y^2\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2b_y^2k_y^2\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2k_y^2\omega\omega_{\mathrm{pe}}^4 + k_x^2\omega(2\omega^4 - 2\omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + 2\omega_{\mathrm{pe}}^2) + \\ + \omega_{\mathrm{pe}}^2(2b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + 2\omega_{\mathrm{pe}}^2)) - \omega_0\omega_{\mathrm{pe}}^2(-4b_x^3b_yk_xk_y^3\omega^2\omega_0^2 + b_x^4k_y^4\omega^2\omega_0^2 + b_y^2(b_y^2k_x^4\omega^2\omega_0^2 + \\ 4k_x^2k_y^2(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + 4k_y^4(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2) + 2b_x^2k_x^2(2k_x^2(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + k_y^2(2\omega^4 + 2^2\omega_{\mathrm{pe}}^4 + \omega^2(3b_y^2\omega_0^2 - 4\omega_{\mathrm{pe}}^2))) - \\ - 4b_xb_yk_xk_y(-2k_y^2(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + k_x^2(-2\omega^4 - 2^2\omega_{\mathrm{pe}}^4 + \omega^2(b_y^2\omega_0^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2))))^{(1/2)}))/ \\ /(2(k_x^2 + k_y^2)(2b_xb_yk_xk_y\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + k_x^2(\omega^4 + b_x^2\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^2)) + \\ + k_y^2(\omega^4 + b_y^2\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^2))))) = 0 \end{aligned} \tag{3.81}$$

a druhá

$$\begin{aligned} c^2 - ((\omega(2k_y^2\omega^5 - 2b_x^2k_y^2\omega^3\omega_0^2 - 2b_y^2k_y^2\omega^3\omega_0^2 - 4k_y^2\omega^3\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2b_xb_yk_xk_y\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \\ + b_x^2k_y^2\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2b_y^2k_y^2\omega\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + 2k_y^2\omega\omega_{\mathrm{pe}}^4 + k_x^2\omega(2\omega^4 - 2\omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + 2\omega_{\mathrm{pe}}^2) + \\ + \omega_{\mathrm{pe}}^2(2b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + 2\omega_{\mathrm{pe}}^2)) + \omega_0\omega_{\mathrm{pe}}^2(-4b_x^3b_yk_xk_y^3\omega^2\omega_0^2 + b_x^4k_y^4\omega^2\omega_0^2 + b_y^2(b_y^2k_x^4\omega^2\omega_0^2 + \\ 4k_x^2k_y^2(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + 4k_y^4(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2) + 2b_x^2k_x^2(2k_x^2(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + k_y^2(2\omega^4 + 2^2\omega_{\mathrm{pe}}^4 + \omega^2(3b_y^2\omega_0^2 - 4\omega_{\mathrm{pe}}^2))) - \\ - 4b_xb_yk_xk_y(-2k_y^2(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2)^2 + k_x^2(-2\omega^4 - 2^2\omega_{\mathrm{pe}}^4 + \omega^2(b_y^2\omega_0^2 + 4\omega_{\mathrm{pe}}^2))))^{(1/2)}))/ \\ /(2(k_x^2 + k_y^2)(2b_xb_yk_xk_y\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 + k_x^2(\omega^4 + b_x^2\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^2)) + \\ + k_y^2(\omega^4 + b_y^2\omega_0^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 - \omega^2(b_x^2\omega_0^2 + b_y^2\omega_0^2 + \omega_{\mathrm{pe}}^2))))) = 0. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Obe riešenia sme dosadili spätne do rovnice

$$\begin{pmatrix} -c^2k_y^2+\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1-b_x^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & c^2k_xk_y+\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{b_xb_y\omega_0^2}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_y\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \\ c^2k_xk_y+\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{b_xb_y\omega_0^2}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -c^2k_x^2+\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1-b_y^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_x\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \\ \mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_y\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -\mathrm{i}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega}\frac{b_x\omega_0}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} & -c^2(k_x^2+k_y^2)+\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\frac{1}{1-b^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \end{pmatrix}\delta\mathbf{E}=0, \tag{3.83}$$

z ktorej sme podmienku (3.80) odvodili. Program *Mathematica 10* našiel riešenia pre obe rovnice (3.81) a (3.82). Nech $\delta\mathbf{E}=(\delta E_x,\delta E_y,\delta E_z)$, potom riešenia naberajú tvar $\delta E_y = f(\delta E_x)$ a $\delta E_z = f(\delta E_x)$, ktoré tu pre svoju komplikovanosť nebudeme uvádzať. Pri voľbe δE_x sme teda schopní dopočítať zložky δE_y a δE_z.

Ak sme položili limitu

$$\omega_0 \to 0,$$

dostali sme v oboch prípadoch (3.81) a (3.82) vzťah pre riadnu vlnu, ktorá sa šíri plazmou bez magnetického poľa, resp. s magnetickým poľom zanedbateľnej veľkosti

$$\omega^2=\omega_{\mathrm{pe}}^2+c^2(k_x^2+k_y^2). \tag{3.84}$$

Kapitola 4

Grafické znázornenie Stixových koeficientov

V predošlom texte sme dostali rôzne predpisy pre tenzor permitivity, podľa toho, či sme uvažovali s magnetickým poľom, iónmi či tlakom. Následne sme získali i disperzné relácie a našli prepojenie medzi Stixovými koeficientami a indexami lomu šíriacich sa vĺn. Teraz sa pozrieme na to, ako vyzerá priebeh Stixových koefientov ako funkcie pomeru frekvencie prechádzajúcej elektromagnetickej vlny a plazmovej frekvencie elektrónov $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$. Bude nás zaujímať, či sa ich priebeh zmení s prihliadnutím na rôzne vplyvy.

Porovnanie urobíme aj so Stixovými koeficientami pre vákuum. Keďže vo vákuu je permitivita $\varepsilon = \varepsilon_0$ konštantou, relatívna permitivita má hodnotu jednotkového tenzoru. Ak sa pozrieme na tvar tenzoru (2.41) je nám hneď jasné, že musí platiť

$$S = P = X = 1 \tag{4.1}$$

a

$$D = 0.$$

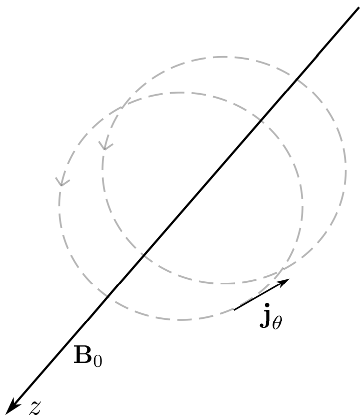
Koeficient X sa síce v tenzore nenachádza, no jeho hodnotu sme mohli zistiť, ak sme vo vzorci (3.38) položili $\omega_{\mathrm{pe}} \to 0$ a $\omega_{\mathrm{ce}} \to 0$. Zároveň už vieme, že X reprezentuje druhú mocninu indexu lomu mimoriadnej vlny $\mathcal{N}_X$. Vlna, ktorá sa šíri plazmou ako mimoriadna vlna, sa musí po prechode do vákua šíriť ako klasická elektromagnetická vlna vo vákuu s indexom lomu $\mathcal{N}_X = 1$, čo potvrdzuje hodnotu koeficientu X vo vákuu. Rovnako to platí aj pre koeficient P, ktorý reprezentuje druhú mocninu indexu lomu riadnej vlny.

Pre lepšiu predstavu použijeme pri grafickom zobrazení približné veľkosti veličín zodpovedajúce zariadeniu s názvom *θ-pinč*. Podľa knihy [14] je *θ-pinč* generovaný pomocou rýchlo narastujúceho azimutálneho prúdu v jednozávitovom vonkajšom vodiči, ktorý je omotaný okolo trubice s plazmou. Prúd vytvára axiálne magnetické pole $\mathbf{B}_0$, ktoré stláča a ohrieva plazmu. Podľa dokumentu [15] toto magnetické pole naindukuje prúd $\mathbf{j}_\theta$. Jednoduchú principiálnu schému je možné nájsť na obrázku Obr. 4.1.

Podľa [15] sa pole $\mathbf{B}_0$ veľmi rýchlo mení. Nás však bude zaujímať iba to, či prítomnosť nenulového konštantného magnetického poľa nejak ovplyvní závislosť koeficientov S, P, D a X na pomere frekvencie vlny a plazmovej frekvencie elektrónov. Preto vyslovíme predpoklad, že počas prechodu elektromagnetickej vlny bola zmena veľkosti magnetického poľa zanedbateľná.

Vezmeme dve veľkosti magnetického poľa, aby sme mohli zároveň posúdiť, či sa priebeh mení v závislosti na veľkosti poľa. Maximálna hodnota veľkosti magnetického poľa, ktorú môžeme na *θ-pinči* dosiahnuť, je podľa [15] približne $B_0 = 20$ T. Cyklotrónová frekvencia elektrónov by mala teda po dosadení do vzorca (1.55) veľkosť

$$\omega_{\mathrm{ce}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\max} = 3,50 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{4.2}$$



Obr. 4.1: Schéma θ-*pinču*. Magnetické pole $\mathbf{B}_0$ má smer osi z, prúdová hustota má nenulovú iba zložku $\mathbf{j}_\theta$. Nákres obrázku bol inšpirovaný literatúrou [16].

V experimente v 60-tych rokoch minulého storočia s 8-metrovým pinčom, popísanom v článku [17], dosiahli maximálne hodnoty magnetického poľa poporadí $1,9$; $2,15$ a $2,5$ T. My vezmeme najnižsiu hodnotu $B_0 = 1,9$ T, ktorá je približne o rád menšia než všeobecne maximálna dosiahnuteľná hodnota $B_0 = 20$ T. Cyklotrónová frekvencia elektrónov naberá hodnotu

$$\omega_{\mathrm{ce}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}} = 3,34 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{4.3}$$

V spomínanom článku [17] dosiahli experimentátori pri θ-*pinči* veľkosť elektrónovej koncentrácie v rozmedzí $2 \div 5 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^{-3}$. Vezmime hodnotu $n_{\mathrm{e}} = 2 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^{-3}$ a vypočítajme plazmovú frekvenciu elektrónov podľa vzorca (1.47). Získame

$$\omega_{\mathrm{pe}} = 7,98 \cdot 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{4.4}$$

Keďže budeme brať Stixove koeficienty ako funkciu $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$, a v Stixových koeficientoch sa vyskytuje cyklotrónová frekvencia vždy vo výraze $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega$, z predošlých údajov je potrebné zistiť hodnotu pomeru $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}}$. Potom môžeme výraz $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega$ zapísať ako

$$\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{pe}}} \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} \tag{4.5}$$

a $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}}$ dosadiť ako konštantu. Ak dosadíme do (4.5) výrazy (4.2) a (4.4) dostaneme

$$0,44 \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}}, \tag{4.6}$$

a ak dosadíme výrazy (4.3) a (4.4) dostaneme

$$0,04 \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}}. \tag{4.7}$$

S vybranými údajmi môžeme graficky znázorniť priebeh S, P, D a X v chladnej bezzrážkovej plazme bez vplyvu iónov či tlaku častíc a bez prítomnosti magnetického poľa v tvare

$$S = P = X = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} \tag{4.8}$$

a

$$D = 0,$$

aj v prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa v tvare

$$S = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}, \qquad D = -\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}}, \tag{4.9}$$

$$P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}, \qquad X = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{1-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}.$$

Zaujíma nás však ešte vplyv iónovej tekutiny.

Plazmovú frekvenciu iónov sme zistili dosadením $Z = 1$ do vzorca (1.48) (predpokladáme plne ionizovanú vodíkovú plazmu), a pre jednoduchosť sme predpokladali kvazineutralitu $n_{\mathrm{e}} \approx n_{\mathrm{i}}$. V takom prípade sa plazmová frekvencia elektrónov odlišuje od plazmovej frekvencie iónov iba hmotnostnými členmi m_{i} a m_{e}. Ako sme už spomínali, približne platí $m_{\mathrm{i}} = 1836\ m_{\mathrm{e}}$. My sledujeme závislosť na $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$, a plazmová frekvencia iónov je v Stixových koeficientoch vždy prítomna v člene $\omega_{\mathrm{pi}}/\omega$. Ten upravíme na

$$\frac{\omega_{\mathrm{pi}}}{\omega} = \frac{\omega_{\mathrm{pi}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} = \frac{1}{1836}\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} \tag{4.10}$$

a budeme ho týmto spôsobom dosádzať do Stixových koeficientov pre bezzrážkovú chladnú plazmu bez vonkajšieho magnetického poľa v tvare

$$S = P = X = P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2} \tag{4.11}$$

a

$$D = 0,$$

a s nenulovým vonkajším magnetickým poľom v tvare

$$S = 1 - \frac{\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} - \frac{\frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ci}}^2}{\omega^2}}, \tag{4.12}$$

$$D = -\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ce}}^2}{\omega^2}} + \frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}}{1-\frac{\omega_{\mathrm{ci}}^2}{\omega^2}},$$

$$P = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{\omega^2}$$

a

$$X = \frac{2\mathcal{N}_L^2\mathcal{N}_R^2}{\mathcal{N}_L^2+\mathcal{N}_R^2},$$

kde

$$\mathcal{N}_L^2 = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}}{1-\frac{q_l B}{m_l}}, \qquad \mathcal{N}_R^2 = 1 - \sum_{l=\mathrm{e,i}}\frac{\frac{\omega_{\mathrm{p}l}^2}{\omega^2}}{1+\frac{q_l B}{m_l}}.$$

Podobne budeme do (4.12) dosádzať upravený tvar výrazu

$$\frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega} = \frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} = \frac{\omega_{\mathrm{ci}}}{\omega_{\mathrm{ce}}}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} = \frac{1}{1836}\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{pe}}}} \tag{4.13}$$

kde $\frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}$ je vyššie vypočítaná konštanta.

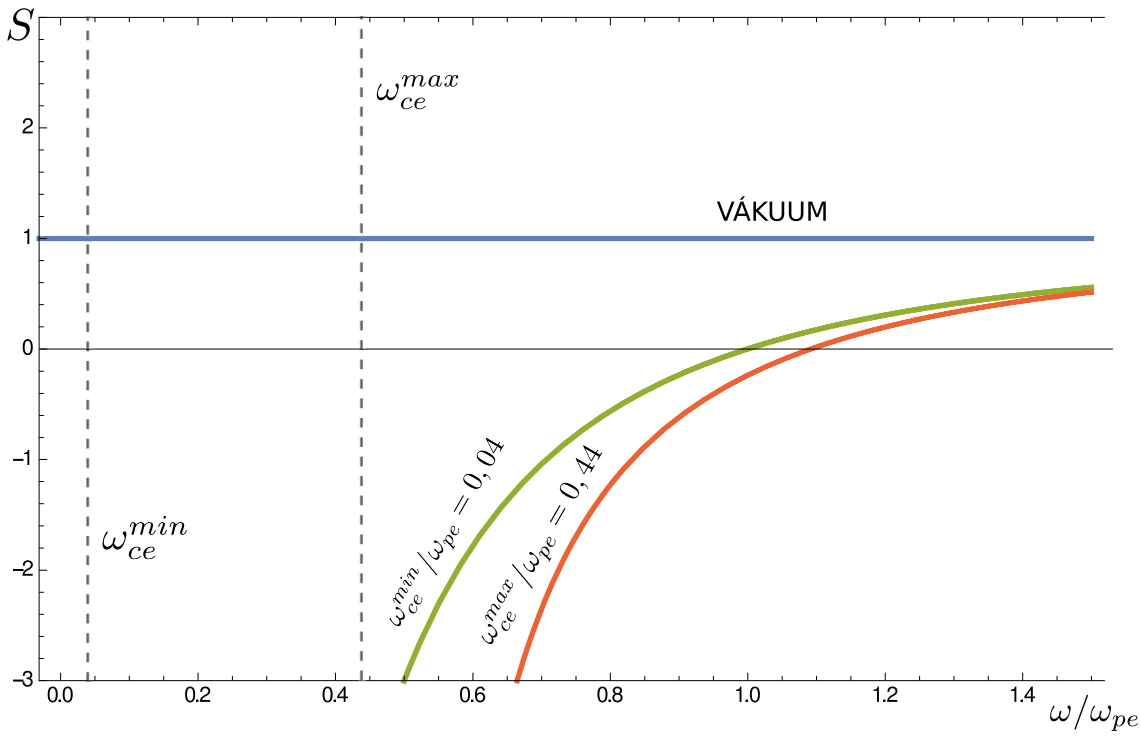
Avšak z grafov, ktoré sme vykreslili, a je ich možné nájsť na ďalšíc stránkach práce, sme zistili, že priebeh S, P, D a X (4.11) sa pri plazmovej frekvencii s hodnotou (4.4) neodlišuje od tvaru (4.8).

Rovnako sa aj závislosť Stixových koeficientov v tvare (4.12) na $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$ pre plazmovú frekvenciu s veľkosťou (4.4) a pre hodnotu cyklotrónovej frekvencie elektrónov (4.3), ako aj pre (4.2), neodlišuje od tvaru (4.9). Preto na všetkých nasledujúcich grafoch budú zobrazené iba predpisy (4.8) a (4.9) a budeme predpokladať, že aproximácia $\omega_{\mathrm{pi}} \to 0$ a $\omega_{\mathrm{ci}} \to 0$ je vhodná a opodstatnená.

Grafy budeme kresliť na škále $\omega/\omega_{\mathrm{pe}} \in (0;\ 1,5)$ pre $S, P, D, X \in (-3,\ 3)$.

Prvý zo Stixových koeficientov, ktorého závislosť na $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$ sme graficky znázornili bol koeficient S a jeho priebeh je možné nájsť na obrázku Obr. 4.2. Význam jednotlivých funkcií je vysvetlený pod obrázkom.

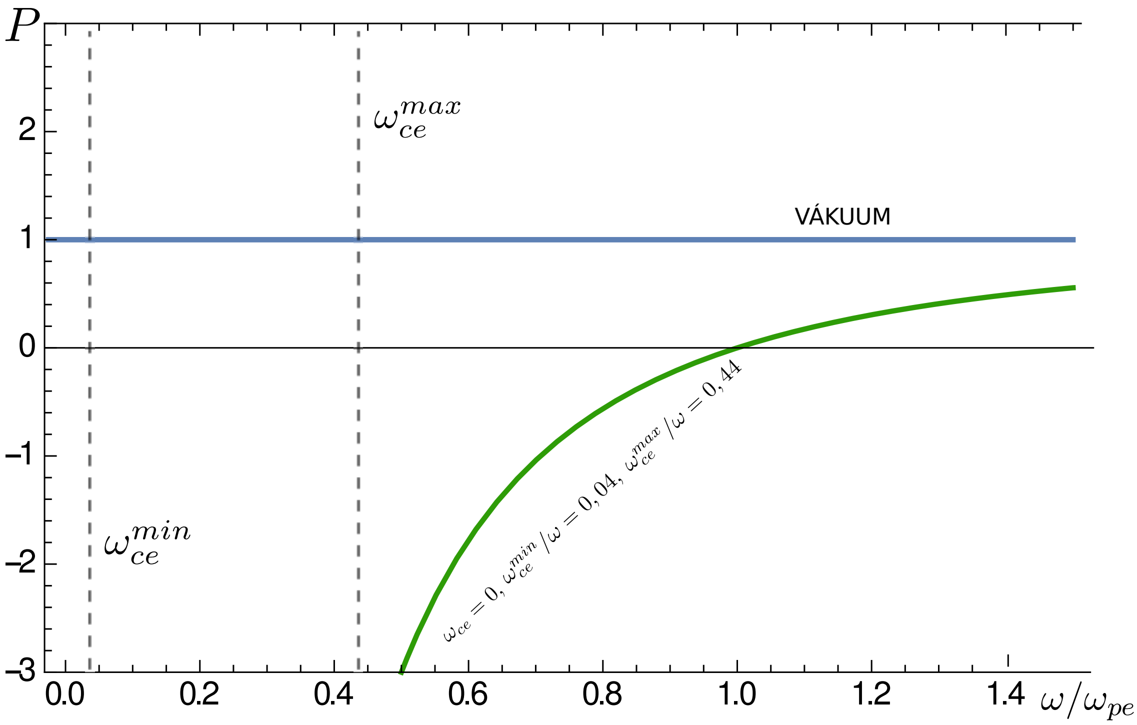
Pri $\omega_{\mathrm{ce}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}} = 0,04\ \omega_{\mathrm{pe}}$ sa Stixov koeficient S začína správať rovnako, ako keby v plazme pôvodne žiadne magnetické pole nebolo, a platilo by $\omega_{\mathrm{ce}} = 0$. Avšak v prípade, že približne platí $\omega_{\mathrm{ce}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}} = 0,44\ \omega_{\mathrm{pe}}$, a cyklotrónová frekvencia s plazmovou sú v rovnakom ráde, koeficient sa na danej škále chová odlišne. V oboch prípadoch má koeficient S má rastúci charakter smerom od mínus nekonečna a so zväčšovaním pomeru $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$ sa ich hodnota blíži ku $S = 1$, čo je hodnota prislúchajúca vákuu a na grafe je znázornená modrou farbou. No ak sa hodnota cyklotrónovej frekvencie približuje k hodnote plazmovej frekvencie, rast k $S = 1$ má pomalší priebeh než pre plazmu bez magnetického poľa.



Obr. 4.2: *Stixov koeficient S*. Červenou farbou je znázornený koeficient S v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,44$. Zelenou farbou je znázornený koeficient S v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,04$, a koeficient S v tvare (4.8) resp. koeficient S v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}} = 0$. Modrou farbou je znázornená platnosť vzťahu $S = 1$ vo vákuu.

Druhý zo Stixových koeficientov, ktorého závislosť na $\omega/\omega_{\text{pe}}$ sme vykreslili, bol koeficient P. Jeho priebeh je možné nájsť na obrázku Obr. 4.3. Význam jednotlivých funkcií je opäť vysvetlený pod obrázkom.

V tomto prípade platí, že pre $\omega_{\text{ce}} = \omega_{\text{ce}}^{\text{max}} = 0,44\omega_{\text{pe}}$, $\omega_{\text{ce}} = \omega_{\text{ce}}^{\text{min}} = 0,04\omega_{\text{pe}}$ a $\omega_{\text{ce}} = 0$ je Stixov koeficient P v tvare (4.8) resp. v tvare (4.9) stále rovnaký, pretože koeficient P nie je magnetickým poľom ovplyvnený. Koeficient P, ktorý je rovný druhej mocnine indexu lomu riadnej vlny, má rastúci charakter smerom od mínus nekonečna a so zväčšovaním pomeru $\omega/\omega_{\text{pe}}$ sa jeho hodnota blíži ku $P = 1$, čo je hodnota prislúchajúca vákuu, podobne ako tomu bolo pri koeficiente S.

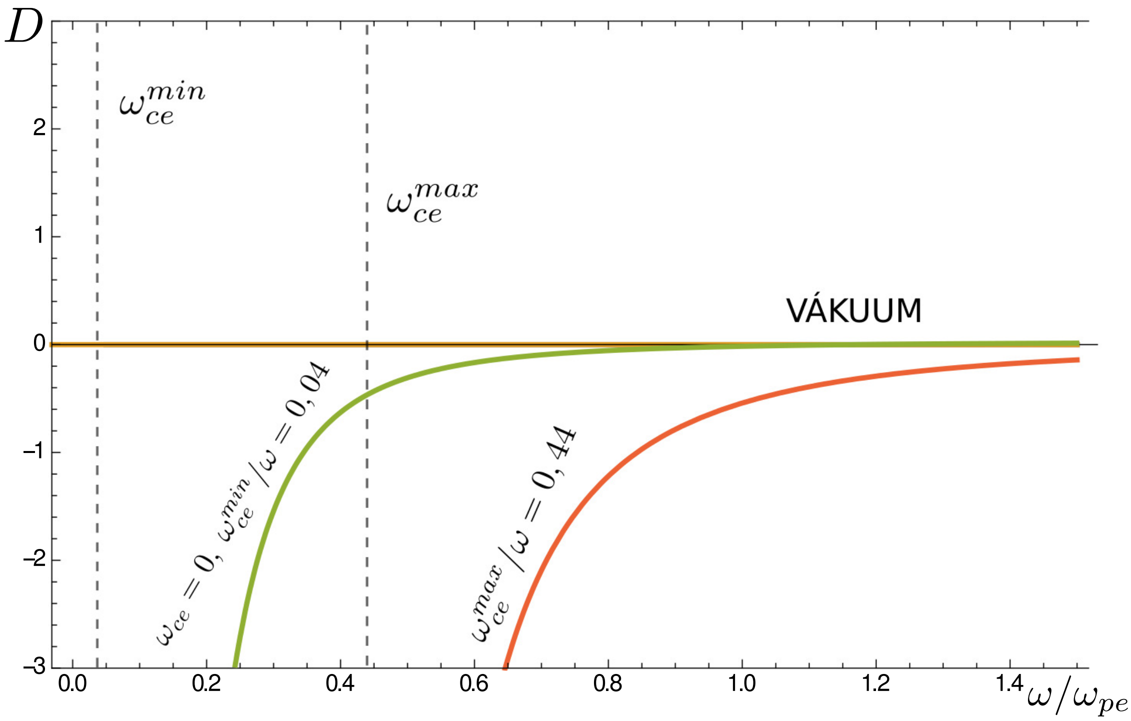


Obr. 4.3: *Stixov koeficient P*. Zelenou farbou je znázornený koeficient P v tvare (4.9) pre $\omega_{\text{ce}}/\omega_{\text{pe}} = \omega_{\text{ce}}^{\text{min}}/\omega_{\text{pe}} = 0,04$, $\omega_{\text{ce}}/\omega_{\text{pe}} = \omega_{\text{ce}}^{\text{max}}/\omega_{\text{pe}} = 0,44$ a $\omega_{\text{ce}} = 0$ resp. koeficient P v tvare (4.8). Modrou farbou je znázornená platnosť vzťahu $S = 1$ vo vákuu.

Priebeh ďalšieho zo Stixových koeficientov ako funkcie $\omega/\omega_{\rm pe}$, a to D, je možné nájsť na obrázku Obr. 4.4. Význam jednotlivých funkcií je opäť vysvetlený pod obrázkom.

Pri $\omega_{\rm ce} = \omega_{\rm ce}^{\rm min} = 0,04\,\omega_{\rm pe}$ nastáva podobný jav ako pri koeficiente S. Stixov koeficient D sa začína správať rovnako, ako keby v plazme pôvodne žiadne magnetické pole nebolo, a platilo by $\omega_{\rm ce} = 0$. V prípade, že platí $\omega_{\rm ce} = \omega_{\rm ce}^{\rm max} = 0,44\,\omega_{\rm pe}$, priebeh koeficientu sa vďaka vplyvu magnetického poľa pozmení.

V oboch prípadoch má koeficient D má rastúci charakter smerom od mínus nekonečna, podobne ako koeficienty S a P na predošlých stránkach. No so zväčšovaním pomeru $\omega/\omega_{\rm pe}$ sa ich hodnota blíži ku $D = 0$, narozdiel od jedničky, ako tomu bolo v prípade predošlých koeficientov. Je to práve preto, že hodnota $D = 0$ prislúcha koeficientu D vo vákuu. Ak sa hodnota cyklotrónovej frekvencie približuje k hodnote plazmovej frekvencie, rast D ako funkcie $\omega/\omega_{\rm pe}$ z mínus nekonečna má pomalší priebeh než pre plazmu bez magnetického poľa.



Obr. 4.4: *Stixov koeficient D*. Červenou farbou je znázornený koeficient D v tvare (4.9) pre $\omega_{\rm ce}/\omega_{\rm pe} = \omega_{\rm ce}^{\rm max}/\omega_{\rm pe} = 0,44$. Zelenou farbou je znázornený koeficient D v tvare (4.9) pre $\omega_{\rm ce}/\omega_{\rm pe} = \omega_{\rm ce}^{\rm min}/\omega_{\rm pe} = 0,04$, a koeficient D v tvare (4.8) resp. koeficient D v tvare (4.9) pre $\omega_{\rm ce} = 0$. Oranžovou farbou je znázornený vzťah $D = 0$ platiaci vo vákuu.

Na obrázku Obr. 4.5 je možné nájsť chovanie koeficientu X ako funkcie $\omega/\omega_{\mathrm{pe}}$. Pre tento koeficient sme na obrázku vyznačili i hodnotu hornej hybridnej rezonancie $\omega_h = \sqrt{\omega_{\mathrm{pe}}^2 + \omega_{\mathrm{ce}}^2}$ pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}}/\omega = 0,04$

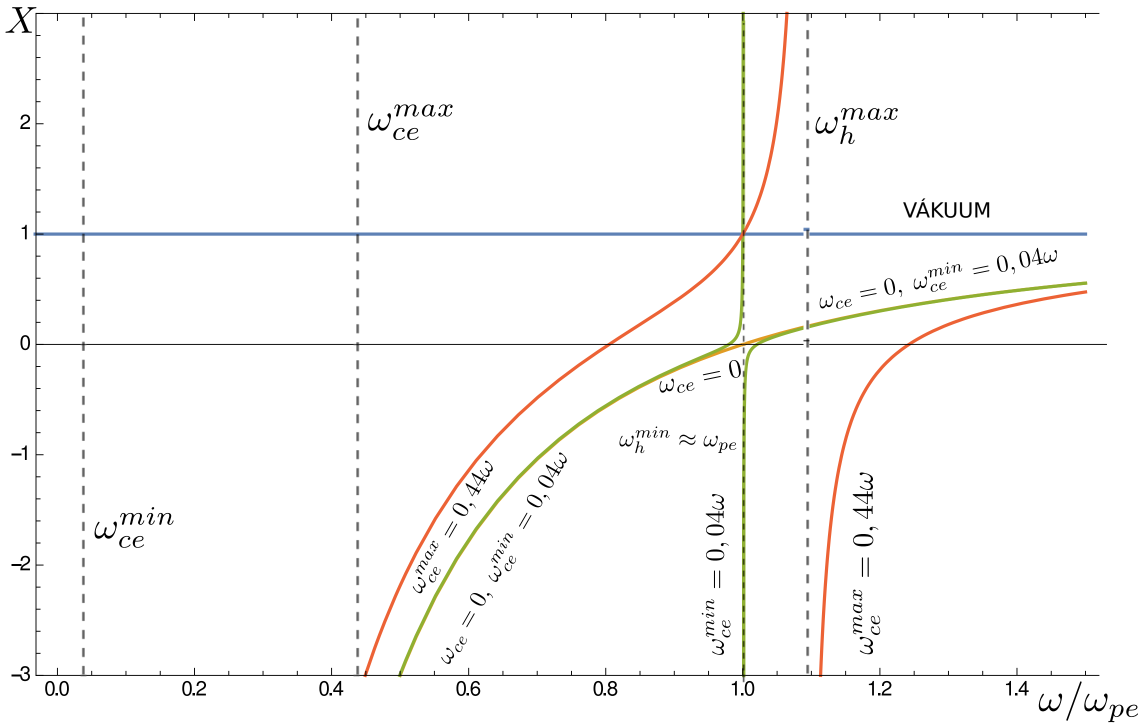
$$\omega_h^{\mathrm{min}} \approx \omega_{\mathrm{pe}} \approx \omega. \tag{4.14}$$

Doteraz sme všetky hodnoty frekvencií a ich pomerov zaokrúhľovali na dve platné desatinné miesta. Pri tejto aproximácii platí, že plazmová frekvencia je rovná hornej hybridnej rezonancii, pretože cyklotrónová frekvencia je príliš nízka na to, aby svojou veľkosťou prispievala. Pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}}/\omega = 0,44$ platí

$$\omega_h^{\mathrm{max}} = 1,09\,\omega. \tag{4.15}$$

Koeficient X môžeme ako druhú mocninu indexu lomu mimoriadnej vlny zapísať v tvare (3.39). Odtiaľ vidíme, že práve pre hodnotu $\omega = \omega_h$ nastáva v koeficiente nespojitosť. To sa prejavilo i na na grafickom zobrazení. Pre X v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,04$ aj pre $\omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,44$ rastie priebeh funkcie z mínus nekonečna do plus nekonečna od ω rovné nule až k príslušným horným hybridným rezonanciám $\omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}}$ a $\omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}}$. Pre ω väčšie ako príslušné horné hybridné rezonancie koeficienty rastú z mínus nekonečna a s rastúcou frekvenciou vlny ω sa blížia až k hodnote $X = 1$ typickej pre vákuum.

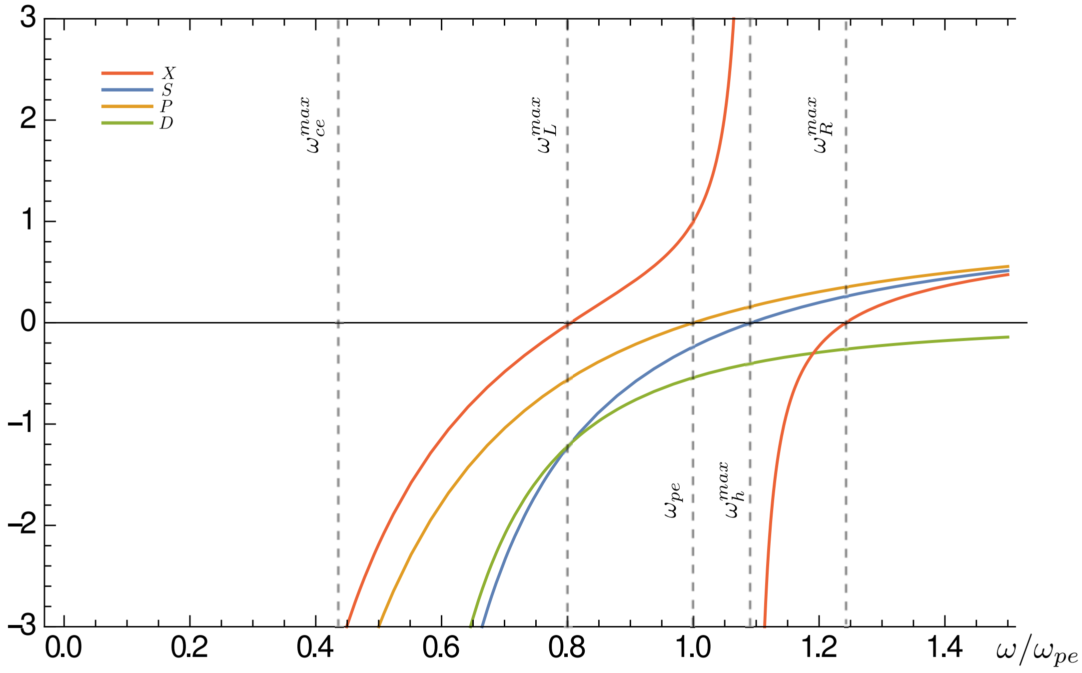
Koeficient X v tvare (4.8) sa skoro na celom intervale $\omega/\omega_{\mathrm{pe}} \in (0;\ 1,5)$ prakticky správa ako koeficient v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{min}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,04$. Podobne sa v tomto ohľade chovali i koeficienty S a D. Avšak pri X nastáva malý rozdiel v blízkosti hodnoty $\omega = \omega_{\mathrm{pe}}$, keďže v tvare (4.8) horná hybridná rezonancia nevystupuje. Z tohto dôvodu je funkcia spojitá na celom príslušnom intervale a rastie limitne z mínus nekonečna až po $X = 1$.



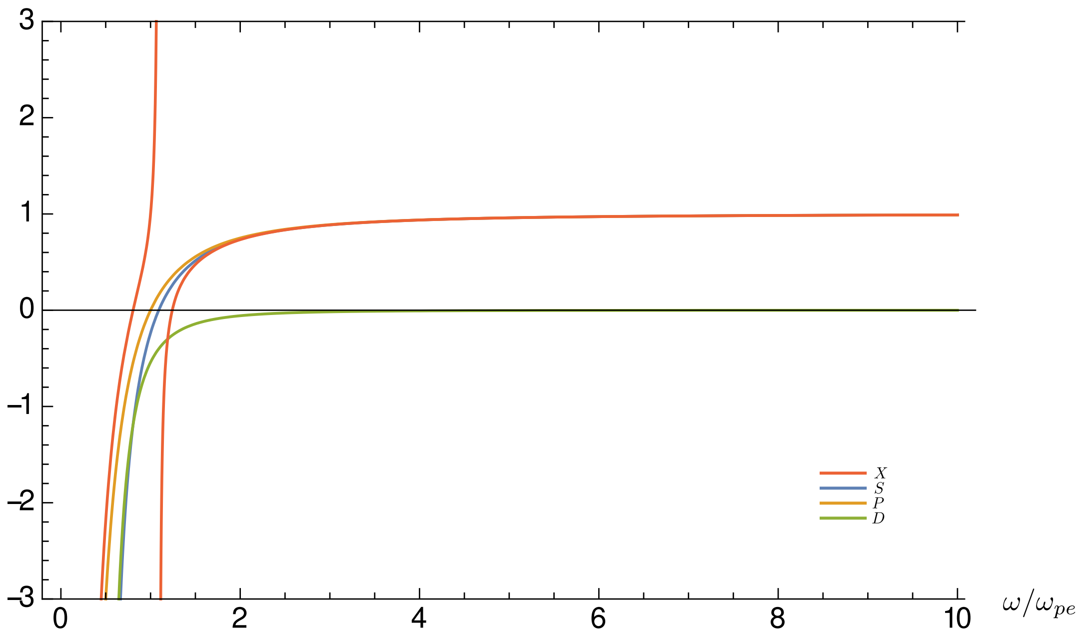
Obr. 4.5: *Stixov koeficient X*. Červenou farbou je znázornený koeficient X v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{\mathrm{max}}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,44$. Zelenou farbou je znázornený koeficient X v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}}/\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_{\mathrm{ce}}^{min}/\omega_{\mathrm{pe}} = 0,04$, a koeficient X v tvare (4.8) resp. koeficient X v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}} = 0$. Oranžovou farbou je znázornené chovanie koeficientu X v tvare (4.8) resp. koeficient X v tvare (4.9) pre $\omega_{\mathrm{ce}} = 0$ v okolí hodnoty $\omega = \omega_{\mathrm{pe}}$. Modrou farbou je znázornená platnosť vzťahu $X = 1$ vo vákuu.

Na obrázku Obr. 4.6 sme zobrazili priebeh všetkých koeficientov S, P, D a X v tvare (4.9) na intervale $\omega/\omega_{\text{pe}} \in (0,\ 1,5)$ pre $\omega_{\text{ce}} = 0,44\omega_{\text{pe}}$. Pre šírenie riadnej vlny je dôležitá iba oblasť $\omega > \omega_{\text{pe}}$. Mimo ňu sa riadna vlna plazmou šíriť nemôže. Pre šírenie mimoriadnej vlny sú zas dôležité oblasti (ω_L, ω_H) a (ω_R, ∞) , kde sa mimoriadna vlna môže šíriť.

Koeficienty sme na Obr. 4.7 vykreslili na intervale $\omega/\omega_{\text{pe}} \in (0,\ 10)$, aby sme mohli lepšie smerovať ich správanie smerom ku $\omega/\omega_{\text{pe}} \to \infty$. S rastúcou frekvenciou vlny sa koeficienty limitne výrazne blížia k ich hodnote vo vákuu (4.1). Významené zmeny hodnôt koeficientov sa vyskytujú hlavne na oblasti $\omega \in (0, \omega_h)$, kde sa ich priebeh značne odlišuje od priebehu vo vákuu.



Obr. 4.6: *Stixove koeficienty S, P, D a X v tvare* (4.9). Grafy sú vykreslené pre $\omega_{\text{ce}} = 0,44\omega_{\text{pe}}$.



Obr. 4.7: *Stixove koeficienty S, P, D a X v tvare* (4.9). Grafy sú vykreslené pre $\omega_{\text{ce}} = 0,44\omega_{\text{pe}}$.

Kapitola 5

Grafické zobrazenie prechodu svetelného lúča plazmovou nehomogenitou

5.1 Hamiltonov princíp

Doteraz sme sa zaoberali tým, ako sa elektromagnetická vlna správa v určitom prostredí a odvodili sme si závislosti medzi veličinami, ktoré tieto vzťahy určujú. Za tým, prečo sa šírenie deje práve týmto spôsobom, stoja hlbšie fyzikálne princípy.

Významný americký fyzik a popularizátor vedy Richard P. Feynman kedysi poukázal na to, že ak sa chce plavčík dostať čo najrýchlejšie k topiacemu sa človeku cez pláž do vody, mal by uvažovať spôsobom, akým „uvažuje" svetlo [18]. Tento nadnesený, no veľmi trefný príklad, má skutočne svoje opodstatnenie a naráža na Fermatov princíp, ktorý podľa [19] zneje:

Zo všetkých možných dráh, ktorými sa dá dostať z jedného bodu do druhého, si svetlo vyberá takú, ktorú môže prejsť za čo najkratší čas.

V jednoduchosti povedané, Fermatov princíp používame na zistenie dráhy svetelnej vlny tým spôsobom, že počítame extrém z dĺžky dráhy $\mathcal{L} = c\mathcal{T}$, kde $\mathcal{T}$ je doba, za ktorú svetlo dráhu $\mathcal{L}$ urazilo [18]. Na podobnej podstate stojí Hamiltonov princíp.

Hamiltonov princíp je známy predovšetkým z mechaniky, a jeho znenie sem zapíšeme tak, ako je to uvedené vo vysokoškolských skriptách [20]:

Predpokladajme, že existuje funkcia času t, zovšeobecnených súradníc q_1,...,q_m a ich prvých derivácii podľa času $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m$

$$L(t, q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m), \tag{5.1}$$

taká, že zo všetkých možných závislostí $q_k(t) = f_k(t)$ sa v prírode realizuje tá, pre ktorú má integrál

$$\mathcal{S}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m)\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

extrém (väčšinou minimum). Funkciu $L(t, q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m)$ nazývame Lagrangeova funkcia a integrál $\mathcal{S}(t_1, t_2)$, integrál akcie.

Integrál akcie sa dá zároveň napísať v tvare uvedenom v literatúre [21]

$$\mathcal{S}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) \mathrm{d}t, \tag{5.3}$$

kde p_j, pre $j \in 1, ..., m$ sú zovšeobecnené hybnosti a $\mathcal{H}$ je Hamiltonova funkcia, tzv. *hamiltonián*. Minimalizovaním akcie $\mathcal{S}$ s využitím matematickej teórie ohľadom variačného počtu je možné odvodiť Hamiltonove rovnice, ktoré používame na popis časového vývoja systému. Odvodenie je možné nájsť napr. v skriptách Teoretickej fyziky [21]. My uvedieme ich konečný tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Premenné $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, ..., q_m, p_1, ..., p_m)$ sú premenné na *fázovom priestore.*

V ďalšom texte budem hľadať význam jednotlivých veličín L, $\mathcal{S}$, p, q a $\mathcal{H}$ v prípade šíriacej sa elektromagnetickej vlny.

Vezmeme fázu vlny (1.4) v tvare

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t, \tag{5.5}$$

pre ktorej diferenciál platí

$$\mathrm{d}\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathrm{d}t = \mathbf{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \omega \mathrm{d}t. \tag{5.6}$$

Vývoj fázy vlny od t_1 po t_2 sa dá následne napísať v integrálnom tvare

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \omega(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \right) \mathrm{d}t. \tag{5.7}$$

Integrály (5.3) a (5.7) sú zhodné, ak položíme

$$\mathcal{S} \equiv \varphi, \qquad \mathcal{H} \equiv \omega \tag{5.8}$$

a

$$q_j \equiv x_j, \qquad p_j \equiv k_j, \tag{5.9}$$

kde x_j a k_j sú jednotlivé zložky vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{k}$. Hamilton ako prvý vyslovil myšlienku zápisu fáze ako integrálu nejakej funkcie pozdĺž jednodimenzionálnej trajektórie, ktorá v tomto ponímaní predstavuje lúč. Svetelný lúč je kolmý na skutočné vlnoplochy a jeho smer je smer šírenia energetického toku, ako je to spomenuté i v literatúre [22]. Intuitívne si ho predstavujeme ako úzku svetelnú vlnu, no v skutočnosti je to vždy iba aproximácia skutočného svetla.

Vďaka odvodeniu rovnice (5.7) a poukázaniu na analógiu s rovnicou (5.3), môžeme Hamiltonove rovnice pre svetelný lúč (5.4) napísať v tvare

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ako sme sa v predošlých kapitolách presvedčili, mnohokrát je problematické získať disperznú reláciu v tvare explicitnej funkcie $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{k})$. Predpokladajme teda, že disperznú reláciu je možné písať v implicitnom tvare

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0, \tag{5.11}$$

kde $H(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ je funkcia závislá na polohovom vektore $\mathbf{x}$ a vlnovom vektore $\mathbf{k}$. Ďalej budeme predpokladať, že polohový vektor $\mathbf{x}(\tau)$ a vlnový vektor $\mathbf{k}(\tau)$ sú hladké funkcie nejakého parametru τ. Pre rovnicu (5.11) teda platí

$$H(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{k}(\tau)) = 0. \tag{5.12}$$

Derivujme (5.12) podľa parametru τ:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{5.13}$$

Ak zvolíme parameter τ tak, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}}, \tag{5.14}$$

dostaneme z rovnice (5.13) podmienku

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \tag{5.15}$$

Dostávame tak novú sadu Hamiltonových rovníc analogickú s (5.10) [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}}, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Medzi rovnicami (5.10) a (5.16) platia vzťahy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} &= \frac{\partial H}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{\partial H}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

odkiaľ už môžeme vidieť vzťah medzi parametrom t, ktorý sme označili ako fyzikálny čas a parametrom τ:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}. \tag{5.18}$$

Konkrétny fyzikálny význam parametru τ je teda určený voľbou hamiltoniánu (5.11). Krivka $(\mathbf{x}(t), \mathbf{k}(t))$ je identická s krivkou $(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{k}(\tau))$, jedná sa však o odlišné parametrizácie, ako o tom pojednáva aj článok [23].

5.2 Ray Tracing

V predošlom texte sme odvodili pohybové rovnice pre svetelný lúč. Zistili sme, že jediná vec, ktorú prakticky potrebujeme zistiť, aby sme tieto rovnice mohli konkretizovať pre určité prostredie, je disperzná relácia. V tejto práci sa nám zároveň podarilo odvodiť viaceré predpisy tenzoru permitivity a následne disperzných relácii pre vlny šíriace sa rôznou formou plazmovej tekutiny.

Spojením týchto faktov sme získali možnosť zistiť presnú trajektóriu lúča. V reálnom svete pri diagnostike plazmy väčšinou sledujeme iba miesto dopadu svetla, ale nevieme, ako vyzeral priebeh jeho trajektórie (tento fakt sa využíva napr. pri šlírovej metóde, ktorú v texte spomenieme neskôr), preto môžeme absenciu tejto vedomosti vynahradiť teoretickým skúmaním.

Zároveň si ale musíme uvedomiť, že disperzné relácie vo všeobecnosti naberajú zložité predpisy. Aby sme zistili z rovníc (5.16) trajektóriu lúča, potrebujeme hamiltonián derivovať podľa polohového vektoru $\mathbf{x}$ a vlnového vektoru $\mathbf{k}$ a následne sústavu diferenciálnych rovníc počítať.

To, ako rovnice počítať a následne ich riešenie graficky znázorniť, nám popisuje technika s názvom *Ray Tracing*. Ray Tracing je podľa [24] metóda na vykreslenie (vo všeobecnosti) trojdimenzionálnej grafiky s veľmi komplexnými interakciami svetla. Pokúša sa simulovať trajektóriu, ktorú svetlo urazí v určitom prostredí. Vo všeobecnosti by sa dalo povedať, že Ray Tracing sa snaží čo najpresnejšie zobraziť chovanie svetla a zohľadňuje javy ako lom a odraz svetla.

Naráža však pritom na problém, pretože ako sme už spomínali v predošlom texte, lúč je iba krivka a určitá aproximácia toho, ako sa svetlo reálne šíri. Ak si predstavíme obyčajný jednoduchý zdroj svetla, ako je napr. žiarovka či baterka, je nám jasné, že lúčov je celý zväzok a sledovať každý jeden zvlášť je prakticky nemožné. To je dôvod, prečo sa v Ray Tracingu využívajú algoritmy, ktoré zohľadňujú to, že sa svetlo šíri v zhlukoch.

My sa však tomuto problému vyhneme a budeme sledovať iba jeden lúč. Dôvodom je predpoklad, že svetelná vlna, ktorá sa plazmou šíri, je kolimovaný, teda nerozbiehavý zväzok, ktorého lúče sa šíria v jednom smere. Zdroj takého svetla môže byť napr. laser. Ten je podľa [25] kvantový generátor a zosilovač koherentného (vnútorne usporiadaného, sfázovaného) optického zariadenia, ktoré vyniká extrémnou monochromatickosťou (teda všetky fotóny majú rovnakú frekvenciu), nízkou rozbiehavosťou zväzku a vysokou hustotou prenášenej energie. Ak sa všetky lúče širia jedným smerom, stačí zväzok aproximovať iba jedným lúčom a sledovať jeho trajektóriu.

Ukážeme si teraz, ako Ray Tracing na danú problematiku aplikovať. Pre jednoduchosť sa obmedzíme na to, že lúč sa môže šíriť v dvoch smeroch x a y, čo implikuje štyri súradnice x, y, k_x a k_y na fázovom priestore.

Prvým krokom bude nájsť disperznú reláciu, podľa ktorej sa svetelný lúč šíri, a priradiť jej status hamiltoniánu. Druhým krokom bude zistiť tvary rovníc (5.16), ktoré vypočítame jednoducho aplikovaním príslušných derivácii na hamiltonián. Ďalšou úlohou bude určiť spôsob, ako rovnice riešiť. Na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc existujú numerické metódy.

Asi najznámejšou numerickou metódou na riešenie sústavy n obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu v tvare

$$\frac{\mathrm{d}y_i(\tau)}{\mathrm{d}x} = f_i(\tau, y_1, y_2, ..., y_n), \tag{5.19}$$

kde funkcie f_i pre $i \in \hat{n}$ na pravej strane sú známe funkcie, je metóda *Runge-Kutta*.

Metóda Runge-Kutta prvého rádu je omnoho známejšia pod názvom *Eulerova metóda*.

Veľkosť chyby *Eulerovej metódy* je úmerná $(\Delta\tau)^2$, kde $\Delta\tau$ je krok metódy. Zapíšeme, ako vyzerá y_i v $\tau_k + \Delta\tau$ pomocou Taylorovho rozvoja [26]:

$$y_i(\tau_k + \Delta\tau) = y_i(\tau_k, y_1(\tau_k), ..., y_n(\tau_k)) + \Delta\tau \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_k, y_1(\tau_k), ..., y_n(\tau_k)) + O(\Delta\tau)^2. \quad (5.20)$$

V našom prípade, vzhľadom ku Hamiltonovým rovniciam (5.16), budú rovnice (5.20) naberať tvar

$$x(\tau_k + \Delta\tau) = x(\tau_k) + \Delta\tau \frac{\partial H}{\partial k_x}(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k), k_x(\tau_k), k_y(\tau_k)) + O(\Delta\tau)^2, \quad (5.21)$$

$$y(\tau_k + \Delta\tau) = y(\tau_k) + \Delta\tau \frac{\partial H}{\partial k_y}(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k), k_x(\tau_k), k_y(\tau_k)) + O(\Delta\tau)^2, \quad (5.22)$$

$$k_x(\tau_k + \Delta\tau) = k_x(\tau_k) - \Delta\tau \frac{\partial H}{\partial x}(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k), k_x(\tau_k), k_y(\tau_k)) + O(\Delta\tau)^2, \quad (5.23)$$

a

$$k_y(\tau_k + \Delta\tau) = k_y(\tau_k) - \Delta\tau \frac{\partial H}{\partial y}(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k), k_x(\tau_k), k_y(\tau_k)) + O(\Delta\tau)^2. \quad (5.24)$$

Presnosť tejto metódy je ale vo väčšine prípadov nedostatočná. Existujú však i metódy vyšších rádov, najčastejšie sa používa metóda Runge-Kutta 4. rádu [27]. Označme:

$$l_1 = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_k, y_1(\tau_k), ..., y_n(\tau_k)). \quad (5.25)$$

Zadefinujeme ďalšie tri výrazy pre zlepšenie presnosti metódy:

$$l_2 = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_k + \frac{1}{2}\Delta\tau, y_1(\tau_k) + \frac{1}{2}\Delta\tau \cdot l_1, ..., y_n(\tau_k) + \frac{1}{2}\Delta\tau \cdot l_1), \quad (5.26)$$

$$l_3 = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_k + \frac{1}{2}\Delta\tau, y_1(\tau_k) + \frac{1}{2}\Delta\tau \cdot l_2, ..., y_n(\tau_k) + \frac{1}{2}\Delta\tau \cdot l_2), \quad (5.27)$$

$$l_4 = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_k + \Delta\tau, y_1(\tau_k) + \Delta\tau \cdot l_3, ..., y_n(\tau_k) + \Delta\tau \cdot l_3). \quad (5.28)$$

Potom môžeme namiesto výrazu (5.20) $y_i(\tau)$ pre $i \in \hat{n}$ použiť:

$$y_i(\tau_k + \Delta\tau) = y_i(\tau_k, y_1(\tau_k), ..., y_n(\tau_k)) + \frac{1}{6}\Delta\tau(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) + O(\Delta\tau)^5. \quad (5.29)$$

Metóda vyššieho rádu má výhodu v tom, že jej chyba je menšia, pretože je úmerná vyššej mocnine kroku $\Delta\tau$.

Ďalšou možnosťou je použiť niektorú z metód s adaptabilným krokom. Tieto metódy sú najlepším kompromisom medzi vysokou presnosťou a minimalizovaním počítačového výkonu. Veľkosť kroku je kontrolovaná počas výpočtu a môže byť automaticky pozmenená v záujme presnosti konečného výsledku. Pri metódach s adaptabilným krokom sú parelelne počítané a vzájomne porovnávané dve riešenia rôznych rádov. Týmto spôsobom sa zistí, či je presnosť riešenia v akceptovateľnej tolerancii. Odhad chyby sa porovná s maximálnou možnou akceptovateľnou veľkosťou chyby. Ak je väčší než akceptovateľná hodnota, výpočet opakujeme s menšou hodnotou kroku. Naopak, ak je presnosť ešte vyššia, než je vyžadované, veľkosť kroku môže byť zväčšená, aby sa znižil výpočetný výkon.

Jednou z metód s adaptabilným krokom je Runge-Kutta-Fehlbergova metóda, ktorá porovnáva riešenie metódy Runge-Kutta štvrtého rádu s metódou Runge-Kutta piateho rádu. Ešte presnejšou je Dormand-Princeova metóda, ktorá tiež porovnáva riešenie štvrtého a piateho rádu, ale vyznačuje sa vyššou presnosťou než Runge-Kutta-Fehlbergova metóda. Výpočet riešenia pre Dormand-Princeovu metódu je možné nájsť napr. v dokumente [28].

Z predchádzajúcich odstavcov vyplýva, že riešenie polohového vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ a vlnového vektoru $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ môžeme hľadať pomocou iterácii, ktoré sme schopní napísať v nejakom programovacom jazyku. Výstupom bude zoznam pozícii (x, y) a (k_x, k_y). Pozície (x, y) môžeme už jednoducho zobraziť v ľubovoľnom programe, ktorý umožnuje kreslenie grafov, a spojiť v jednu krivku. Krivka bude aproximáciou svetelného lúča.

Určili sme si všeobecný návod, ako danú problematiku riešiť. V nasledujúcom texte tieto poznatky zúžitkujeme a ukážeme si konkrétnu aplikáciu. Predtým si však povieme pár slov o šlírovej metóde.

5.3 Princíp šlírovej metódy

Optické zobrazovacie metódy sú založené na tom, že zmena hustoty rýchlo prúdiaceho skúmaného plynu súvisí so zmenou indexu lomu plynu. Svetelné lúče, ktoré prechádzajú miestom nehomogénneho rozloženia hustoty sú odchýlené od pôvodnej trajektórie a dochádza k ich fázovému posunu.

Najjednoduchšou metódou je *tieňová metóda*. Lúče zo svetelného zdroja prechádzajú jednou alebo dvoma šošovkami (záleží na tom, či sa používa paralelný alebo rozbiehavý zväzok lúčov, a tiež či sa ako zdroj svetla používa laser alebo iný zdroj svetla). Pokiaľ nie je druhá derivácia indexu lomu prostredia konštantná, na tienidle budú viditeľné nepravidelné plochy s rôznymi odtieňmi a každý lúč sa bude lámať pod iným uhlom. Ak je derivácia nulová, a teda gradient indexu lomu je konštanta, uhol lomu je rovnaký pre všetky lúče prechádzajúce danou oblasťou. Informácie o tieňovej metóde sme čerpali z práce [29].

Pre nás bude momentálne dôležitá *šlírová metóda*, ktorá sa používa i pri diagnostikách plazmy. Slovo *schliere* pochádza z nemčiny a znamená šmuha. V tomto konkrétnom význame označuje lokálnu nehomogenitu v transparentnej látke, v ktorej sa svetlo láme nepravidelne. Metódu prvýkrát použil v 17. st. R. Hook, keď pozoroval teplotné gradienty vo vzduchu spôsobené sviečkou. Neskôr v 19. storočí ju používal Foucalt na pozorovanie optických nehomogenít v skle [30]. Rozdiel od tieňovej metódy je v tom, že po prechode svetla nehomogenitou sa následne filtrujú lúče šíriace sa vybraným smerom pomocou šlírovej clony s britom [29]. Táto metóda je citlivá na prvú deriváciu indexu lomu. Spravidla sa lúč šíri plazmou ako riadna vlna, ktorú sme už v tejto práci spomínali. Odvodili sme i vzťah pre druhú mocninu indexu lomu riadnej vlny v tvare

$$\mathcal{N}^2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2(\mathbf{x})}{\omega^2} = 1 - \frac{n_{\mathrm{e}_0}(\mathbf{x})e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\omega^2} \tag{5.30}$$

Koncentrácia elektrónov $n_{\mathrm{e}_0} = n_{\mathrm{e}_0}(\mathbf{x})$ nemusí byť všeobecne konštantou, ako sme už naznačili i v predošlom texte. Pri prechode nehomogenitou môže závisieť na súradniciach polohy. Priečny gradient koncentrácie plazmy potom spôsobí zmenu indexu lomu a odklon lúča od pôvodného smeru. Brit zaclonı́ neodklonené lúče a na tienidle sa zobrazia len lúče ovplyvnené plazmou. Na šlírovej fotografii nevidı́me plazmu, ale vidı́me oblasti, kde je gradient indexu lomu a teda i koncentrácie nenulový. Znamená to, že vidı́me hranice štruktúr, ktoré sa v plazme nachádzajú [1].

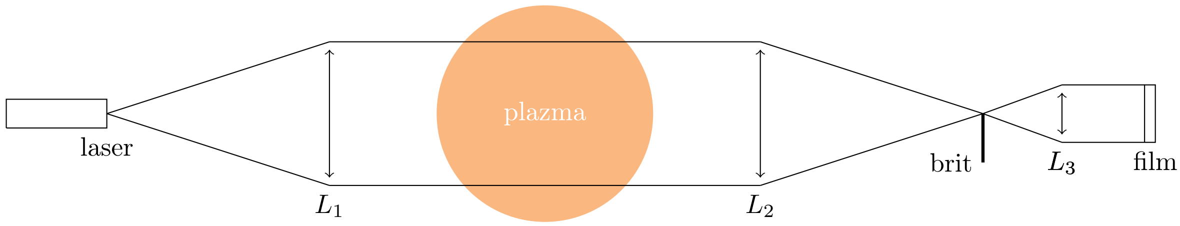
Nech je teda lúč svetla vyslaný v smere osi x. V dôsledku zmeny $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}$ sa láme pod uhlom α.

Pre tento uhol platı́ vzťah:

$$\alpha = \int_0^x \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} \mathrm{d}x. \tag{5.31}$$

Odvodenie predošlého vzťahu sa dá nájsť napr. v literatúrach [30] a [31]. Z hodnoty uhlu α sa dá odhadnúť priemerná elektrónová koncentrácia.

Principiálna schéma šlı́rovej metódy je znázornená na obrázku Obr. 5.1, ktorého nákres bol inšpirovaný literatúrou [32]. Samotná zložitosť aparatúry už závisı́ na konkrétnom experimente.



Obr. 5.1: *Schéma šlírovej metódy.* Na obrázku je znázornený laser, šosovky L_1, L_2 a L_3, oblasť plazmy s kruhovým prierezom, brit a film.

5.4 Zobrazenie prechodu lúča plazmovou nehomogenitou

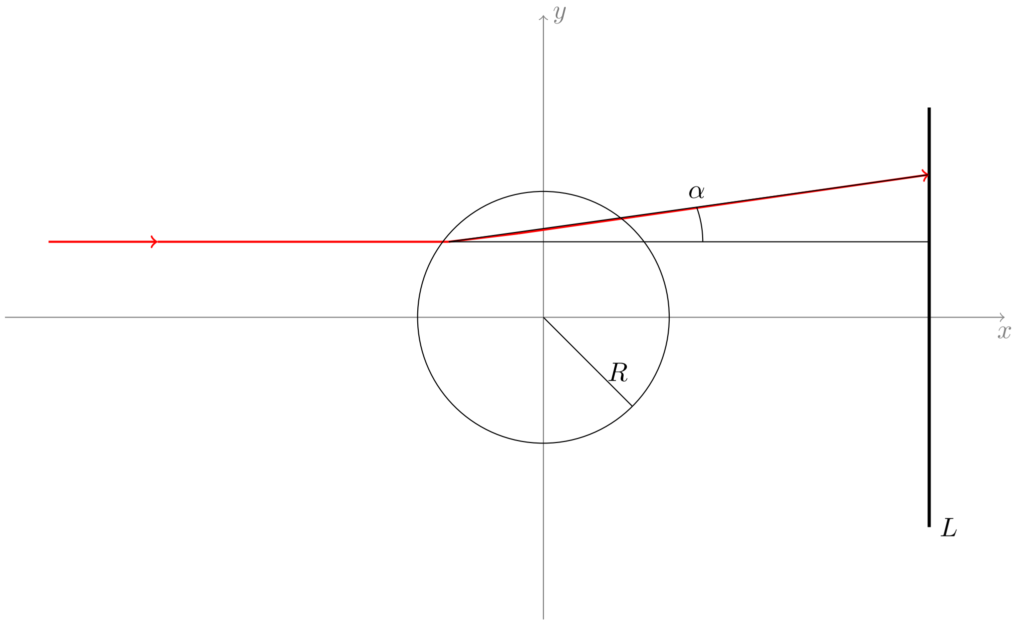
V nasledujúcej časti práce aplikujeme všetky vyššie uvedené poznatky na to, aby sme zobrazili prechod svetla anizotropným nehomogénnym prostredím. Budeme voliť jeden lúč, ktorého zdroj je laser. Ak bude koncentrácia závislá na priestorových súradniciach, budeme očakávať odklon od pôvodného smeru, presne tak, ako sa to očakáva pri vyššie spomı́nanej šlı́rovej metóde.

Zvolı́me plazmovú nehomogenitu v tvare valca s polomerom R. Budeme predpokladať, že má pozdĺž osi z konštantné vlastnosti, a preto budeme zobrazovať iba prierez pinču. Laserový lúč bude pustený v smere osi x. Uhol, ktorý budeme sledovať, bude uhol odklonu od pôvodného šı́renia α. Principiálna schéma je zobrazená na Obr. 5.3.

Pred tým, než sa lúč dotkne plazmy, jeho vlnový vektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ bude mať nulovú zložku k_y. Predpokladáme, že v okolı́ zariadenia sa svetlo šı́ri ako vo vákuu, a x-ovej zložke vlnového vektoru priradı́me hodnotu

$$k_x = \frac{\omega}{c}. \tag{5.32}$$

Keď sa lúč dotkne plazmy, frekvencia vlny sa v závislosti na vlnovom vektore bude meniť podľa predpı́sanej disperznej relácie. Budeme predpokladať, že počiatočné magnetické pole v plazme $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ je konštantné a smeruje pozdĺž osi z. Laserové svetlo sa



Obr. 5.2: *Principiálne zobrazenie ohybu lúča pod uhlom α v dôsledku zmeny indexu lomu a jeho dopad na šošovku L.*

šíri kolmo na spomínané pole. V tretej kapitole sme odvodili, že sa takto môžu šíriť dva typy vĺn, vlny riadna a mimoriadna. Disperzné relácie oboch vĺn zapíšeme v implicitnom tvare a označíme ich ako hamiltoniány. Pre riadnu vlnu to bude

$$H = H_0 = \omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2(\mathbf{x}) - c^2k^2 = 0, \tag{5.33}$$

a pre hamiltonián mimoriadnej vlny bude platiť

$$H = H_X = (\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2(\mathbf{x}))(\omega^2 - \omega_{\mathrm{pe}}^2(\mathbf{x}) - c^2k^2) - \omega_{\mathrm{ce}}^2(\omega^2 - c^2k^2) = 0, \tag{5.34}$$

kde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \tag{5.35}$$

Na výpočty derivácii v Hamiltonových rovniciach (5.16), na výpočet diferenciálnych rovníc a na grafické znázornenie prechodu laserového lúča plazmou, sme použili program *Matlab*, verziu *Matlab R2015b*. Jedným z dôvodov bolo, že softvér obsahuje funkciu na deriváciu funkcie podľa vybranej premennej, čo nám značne urýchlilo výpočet.

V programe je taktiež možné použiť niektoré z metód na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc, napr. Dormand-Princeovu metódu rozoberanú v časti 5.2, implementovanú pod názvom *ode45*. Podľa internetovej dokumentácie [33] k softvéru *Matlab* je Dormand-Princeova metóda vhodná na riešenie väčšiny systémov obyčajných diferenciálnych rovníc, a vo všeobecnosti prvou voľbou, po ktorej by sme mali z dostupných možností siahnuť. V prípade, že by nám stačila nižšia presnosť, bola by postačujúca i niektorá z metód z nižšieho rádu, ktorá je efektívnejšia. Avšak výpočetný čas sa ukázal byl v našom prípade nízky (v ráde sekúnd), a nemalo preto zmysel uberať kvôli efektívnosti na presnosti.

Matlab zároveň poskytuje nástroje na riešenie tzv. *stiff* rovníc. V jednoduchosti povedané, sústavy rovníc sú vtedy stiff, ak je riešenie rovníc rozdelené na časti, ktoré sa menia v rámci veľmi rozdielnych škál. Rovnice tohoto typu môžeme v programe *Matlab* identifikovať tak, že ich program nie je schopný vyriešiť, alebo ak výpočet trvá veľmi dlho.

Po otestovaní rovníc (5.16), do ktorých sme dosadili hamiltoniány v tvare (5.33) a (5.34) sme zistili, že podobný problém v našich rovniciach nenastáva. Po úvahach zhrnutých v predošlých odstavcoch sme dospeli k záveru, že najvhodnejšia metóda pre našu úlohu je práve Dormand-Princeova metóda, a preto sme ju použili v rámci riešení v celej tejto práci.

Ďalšou vecou, ktorú sme si potrebovali ujasniť boli hodnoty použitých veličín. Nepoužívali sme hodnoty, ktoré by zodpovedali reálnym údajom v jednotkách SI. V týchto jednotkách pracujeme rádovo s príliš veľkými a malými číslami. Preto sme zvolili uhlovú frekvenciu laserového lúča, rýchlosť svetla a veľkosť vlnového vektora vo vákuu v jednotkovej veľkosti. Ostatné veľkosti veličín, konkrétne plazmovej a cyklotrónovej frekvencie elektrónov a x-ovej a y-ovej zložky vlnového vektoru a polomeru pinču sme prepočítali vzhľadom ku spomínaným veličinám. Jednoduchý prehľad použitých jednotiek je možné nájsť v tabuľke Tabuľka 5.1.

Veličina	Jednotka v SI	Jednotka použitá v Ray Tracingu
ω	s^{-1}	ω
c	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	c
k	m^{-1}	k
ω_{pe}	s^{-1}	ω
ω_{ce}	s^{-1}	ω
k_x	m^{-1}	k
k_y	m^{-1}	k
R	m	k^{-1}

Tabuľka 5.1: *Zápis veličín v jednotkách použitých v Ray Tracingu.*

Ako svetelný lúč sme volili lúč s vlnovou dĺžkou

$$\lambda = 530 \text{ nm}. \tag{5.36}$$

Veľkosť vlnovej dĺžky (5.36) zodpovedá vlnovej dĺžke svetla s umelo zdvojnásobenou frekvenciou laseru Nd:YAG, ktoré bolo použité pri experimentoch so šlírovou metódou v práci [34].

Hodnoty plazmovej a cyklotrónovej frekvencie sme volili rovnaké, ako v kapitole o vykresľovaní Stixových koeficientov, kde sme používali hodnoty pre θ-pinč podľa [15]:

$$\omega_{\mathrm{pe}} = 0,002\,\omega \qquad \omega_{\mathrm{ce}} = 0,001\,\omega \tag{5.37}$$

Použili sme aj profil magnetického poľa resp. cyklotrónovej frekvencie elektrónov závislý na polohovom vektore, ktorý je podľa [35] jedným z možných stavov pre θ-*pinč*:

$$\omega_{\mathrm{ce}}(\mathbf{x}) = \omega_{\mathrm{ce}}\sqrt{1 - \beta \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{R^2}}}. \tag{5.38}$$

Za ω_{ce} dosadili hodnotu (5.37). Parameter β sa používa pre označenie pomeru hydrostatického a magnetického tlaku. Využijeme hodnotu dosiahnutú v experimente z článku [17], $\beta = 0,8$.

Počiatočná veľkosť x-ovej zložky vlnového vektoru bola zvolená ako jednotková, y-ová ako nulová.

Škála, ktorú sme pri vykresľovaní volili bola prispôsobená uhlu odklonu. Na schéme Obr. 5.3 sme naznačili uhol odklonu α pre názornú predstavu, v skutočnosti sú ale tieto uhly malé, menšie ako jeden stupeň. Preto sme volili veľkosť škály na ose x ako dvojnásobok polomeru pinču $2R$ a veľkosť škály na ose y $2{\cdot}10^{-5}R$. Stred plazmovej oblasti sme určili ako polohu $(x, y) = (0, 0)$. Lúč sme „vypustili" z polohy $(x, y) = (-3R/2, R/2)$ v smere osi x.

Pri Ray Tracingu boli použité klasické tri priebehy koncentrácie elektrónov ako funkcie priestorových súradníc, ktoré sú uvedené v literatúre [36], a ich predpisy je možné nájsť nižšie v texte pod označeniami (5.41), (5.42) a (5.43). Hodnota $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ predstavuje vzdialenosť od stredu pinču.

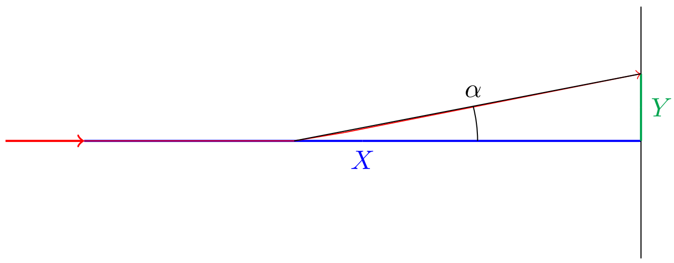
Voľba polomeru pinču bola voliteľná. Ak sa pozrieme na predpisy pre koncentrácie (5.41), (5.42) a (5.43), zistíme, že vo všetkých sa polomer pinču vyskytuje vo výraze r/R, ktorý je bezrozmerný. My sme použili hodnotu $R = 10k^{-1}$. Uhol odklonu lúča sme počítali podľa vzorca

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{Y}{X}, \tag{5.39}$$

kde pre malé uhly stačí použiť aproximáciu

$$\alpha \approx \frac{Y}{X}, \tag{5.40}$$

Význam Y a X znázorňuje schéma na Obr. 5.3.



Obr. 5.3: *Výpočet uhlu odklonu α od pôvodného smeru podľa vzorca* (5.40). Lúč je znázornený červenou farbou.

V nasledujúcom texte je možné nájsť výsledky Ray Tracingu priradené ku konkrétnym koncentráciám elektrónov.

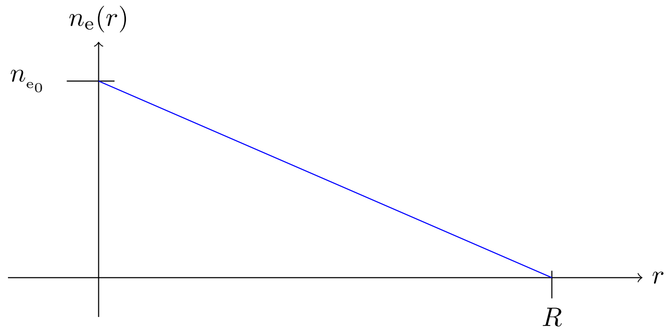
a) Konštantný gradient

V prípade, že v Ray Tracingu dosadíme za elektrónovú koncentráciu predpis

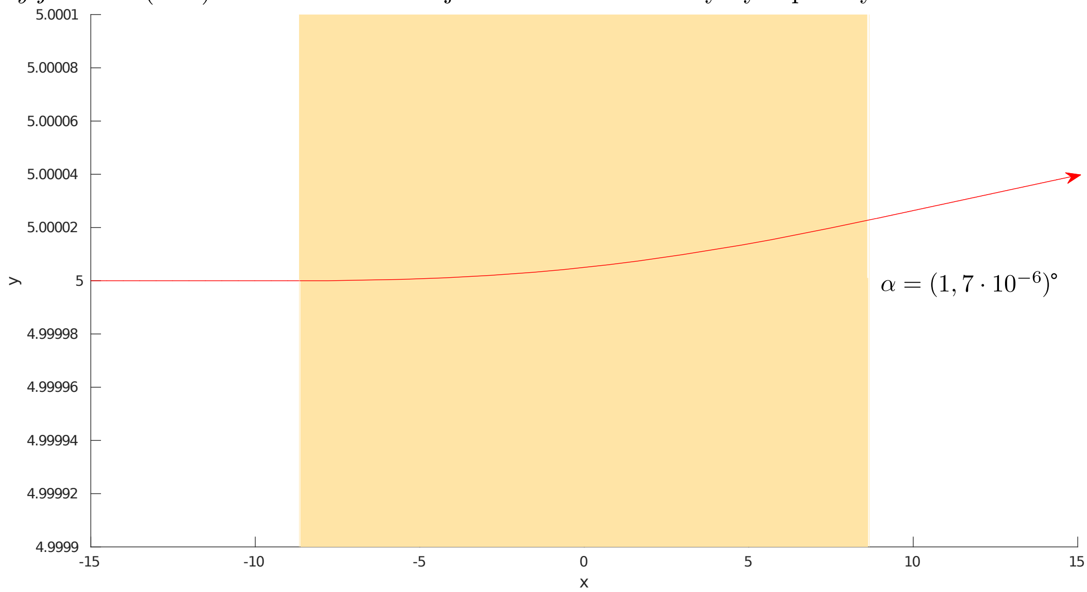
$$n_\mathrm{e}(r) = n_{\mathrm{e}_0}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad \text{pre } r \in (0, R), \tag{5.41}$$

ktorý je ako priebeh funkcie závislej na r zobrazený na Obr. 5.4, jej gradient bude konštatný. Vizualizáciu prechodu laserového lúča plazmou je možné nájsť na Obr. 5.5. Uhol odklonu od pôvodného smeru α sa ukázal byť pri danej presnosti rovnaký pre riadnu vlnu, mimoriadnu vlnu s konštantnou cyklotrónovou frekvenciou (5.37) ako aj s premennou cyklotrónovou frekvenciou v tvare (5.38).

Obr. 5.4: *Priebeh koncentrácie elektrónov* $n_\mathrm{e}(r)$ *v tvare* (5.41).



Obr. 5.5: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu o polomeru* R*, koncentrácia plazmy je rovná* (5.41). Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.



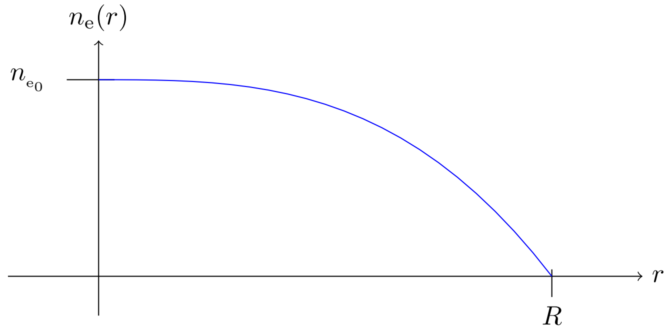
b) Pokles gradientu pri okraji

Na Obr. 5.7. je možné nájsť ohyb laserového lúča pod uhlom α v dôsledku zmien koncentrácie v tvare

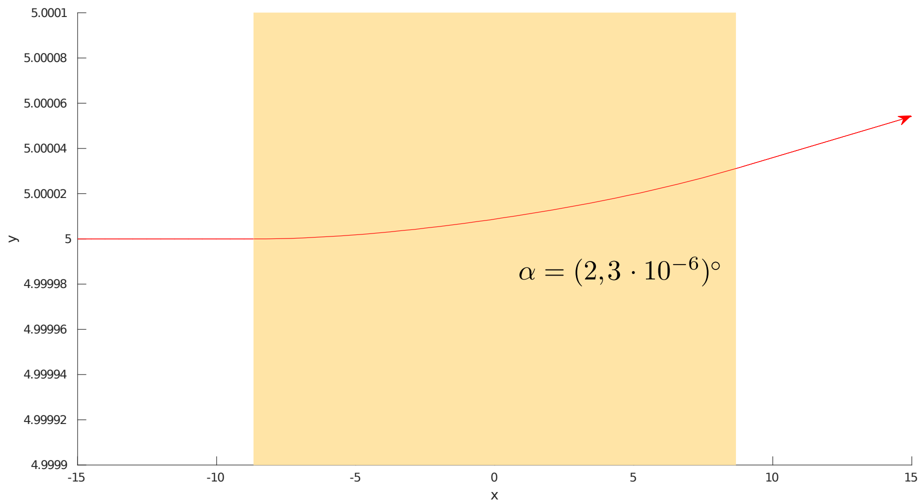
$$n_\mathrm{e}(r) = n_{\mathrm{e}_0}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \qquad \text{pre } r \in (0, R), \tag{5.42}$$

zobrazenom na grafe Obr. 5.6. Gradient (5.42) klesá smerom k okraju a uhol odklonu je výraznejší než v predošlom prípade b). Odchýlenie svetla od pôvodného smeru nie je v rámci danej presnosti pre riadnu vlnu, mimoriadnu vlnu s konštantnou cyklotrónovou frekvenciou (5.37) a s premennou cyklotrónovou frekvenciou v tvare (5.38) odlišné.

Obr. 5.6: *Priebeh koncentrácie elektrónov* $n_\mathrm{e}(r)$ *v tvare* (5.42).



Obr. 5.7: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu s polomerom* R*, koncentrácia plazmy je rovná* (5.42). Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.



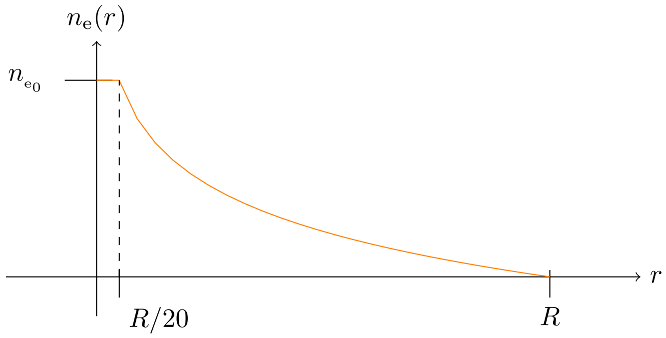
c) Pokles gradientu v strede

Posledný profil koncentrácie, zobrazený na grafe Obr. 5.8, ktorým sa budeme zaoberať, má tvar

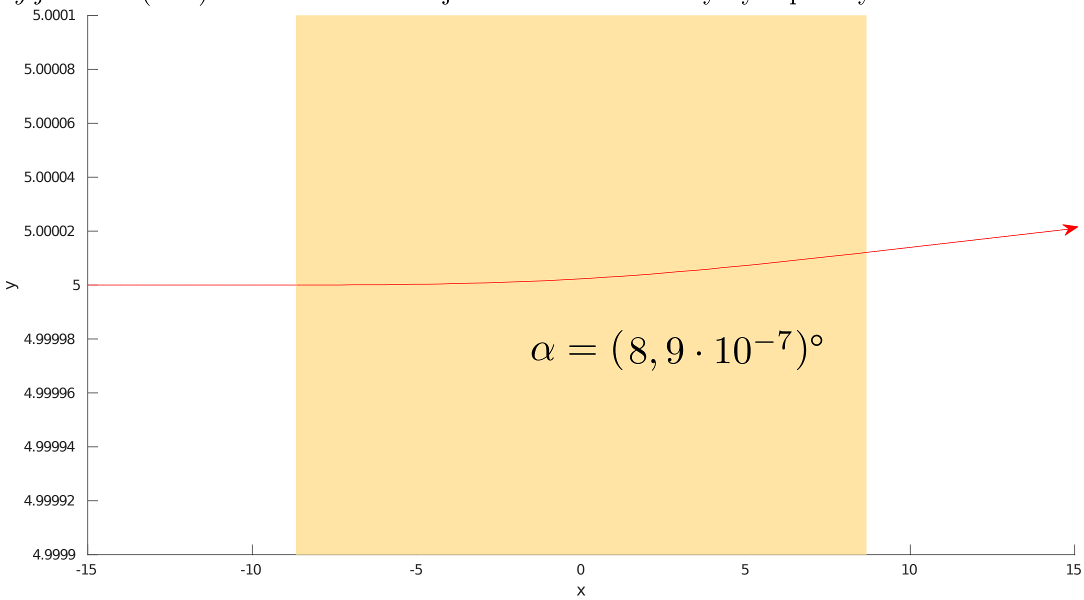
$$n_e(r) = -\frac{n_{e0}}{3}\ln\frac{r}{R} \qquad \text{pre } r \in (R/20, R), \qquad (5.43)$$
$$n_e(r) = n_{e0} \qquad \text{pre } r \in (0, R/20).$$

V blízkosti stredu pinču je koncentrácia konštatná a gradient bude preto nulový. Uhol odklonu α od pôvodného šírenia vlny zobrazený na Obr. 5.9 je menší, než v prípadoch a) a b). Pre priebeh koncentrácie v tvare (5.43) platí rovnaký fakt, ako pre priebehy (5.41) a (5.42), a to že pre riadnu vlnu, mimoriadnu vlnu s konštantnou cyklotrónovou frekvenciou (5.37) ako aj s premennou cyklotrónovou frekvenciou v tvare (5.38) je odklon laserového svetla od pôvodného smeru identický.

Obr. 5.8: *Priebeh koncentrácie elektrónov* $n_e(r)$ *v tvare* (5.43).



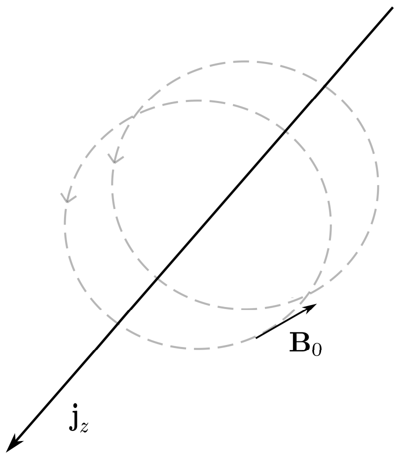
Obr. 5.9: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu s polomerom* R*, koncentrácia plazmy je rovná* (5.43). Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.



5.5 Zobrazenie prechodu lúča plazmou s nenulovým azimutálnym magnetickým poľom

V tejto podkapitole sa pokúsime určiť, či azimutálne magnetické pole prítomné v plazme vplýva na ohyb šíriaceho sa svetla a opäť k tomu využijeme Ray Tracing. V experimentálnom zariadení *z-pinč* zobrazenom na Obr. 5.10, vytvára prúd tečúci plazmou pozdĺž osi medzi dvoma koncovými elektródami azimutálne magnetické pole, ktoré stláča (pinčuje) plazmu a oddeľuje ju od stien, ako to popisuje kniha [14].

Z-pinč je podľa [36] jednoduché a relatívne lacné zariadenie, ktoré sa využíva ako zdroj rentgenového žiarenia, zdroj spektier viacnásobných iónov, zdroj elektrónov, iónov a neutrónov s vysokou energiou, aktívne prostredie pre rentgenové lasery, alternatíva inerciálnej fúzie či zdroj silných magnetických polí a suprahustých látok.



Obr. 5.10: Schéma *z-pinču*. Prúdová hustota $\mathbf{j}_z$ má smer osi z, magnetické má nenulovú iba azimutálnu zložku $\mathbf{B}_0$. Nákres obrázku bol inšpirovaný literatúrou [16].

Ako sme spomínali, v z-pinči je nenulová azimutálna zložka magnetického poľa, a nám sa v tejto práci podarilo odvodiť tenzor permitivity a disperznú reláciu pre magnetické pole, ktoré má nenulové zložky v smere x a y v kartézskych súradniciach. Všeobecne je možné počítať disperznú reláciu i v cylindrických, teda válcových súradniciach, jednoduchšie však bude previesť magnetické pole do kartézskych zložiek. Dôvodom je náš záujem o aplikáciu Ray Tracingu na daný problém a potreba znalosti polohy lúča $\mathbf{x} = (x, y)$ v kartézskych súradniciach, v ktorých sa veľmi jednoducho graficky znázorňuje.

Zapíšme skalárny súčin vektora magnetického poľa a diferenciálu polohového vektora v kartézskych súradniciach (x, y, z), v ktorých má diferenciál tvar $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ a v cylindrických súradniciach (r, θ, z), v ktorých má diferenciál tvar $(\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)$. Oba výrazy sa musia rovnať:

$$\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = B_x \mathrm{d}x + B_y \mathrm{d}y + B_z \mathrm{d}z = B_r \mathrm{d}r + B_\theta r \mathrm{d}\theta + B_z \mathrm{d}z. \tag{5.44}$$

Pre válcové súradnice a ich diferenciály platí:

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \qquad \mathrm{d}\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y, \tag{5.45}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{d}r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y, \tag{5.46}$$

$$z = z, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z. \tag{5.47}$$

Dosaďme vyjadrené diferenciály do (5.44) a položme $B_r = B_z = 0$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = B_x \mathrm{d}x + B_y \mathrm{d}y = B_\theta r \mathrm{d}\theta = -B_\theta \frac{y}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + B_\theta \frac{x}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \tag{5.48}$$

$$= -B_\theta \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + B_\theta \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y. \tag{5.49}$$

Odtiaľ už máme vyjadrenie pre zložky magnetického poľa v kartézskych súradniciach

$$B_x = -B_\theta \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{5.50}$$

a

$$B_y = B_\theta \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5.51}$$

Tvar azimutálnej zložky pre z-pinč, ktorú je možné odvodiť z Ampérovho zákona, je podľa [34] rovná

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}, \tag{5.52}$$

kde $I(r)$ je prúd tečúci vo vzdialenosti $r = \sqrt{x^2+y^2}$ od stredu pinču s polomerom R. Ak predpokladáme, že hustota prúdu je v pinči konštantná , môžeme podľa [34] písať

$$I(r) = I_0 \frac{r^2}{R^2}, \tag{5.53}$$

kde I_0 je celkový prúd. Polomer pinču sa v priebehu celého výboja mení, zároveň nastávajú nestability, ktoré nezachovávajú valcovú symetriu. V našej práci sa sústredíme iba na jednoduchú aproximáciu uvažujúcu predošlé vzťahy a predpoklad, že polomer pinču R je počas prechodu elektromagnetickej vlny z laseru konštantou.

Po dosadení vzťahu (5.53) do (5.52) a následne (5.52) do (5.50) a (5.51) dostaneme výsledné vzťahy pre zložky B_x a B_y:

$$B_x = B_0 b_x = -B_0 \frac{y}{r} \tag{5.54}$$

a

$$B_y = B_0 b_y = B_0 \frac{x}{r}, \tag{5.55}$$

kde sme výrazom B_0 označili vzťah

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}. \tag{5.56}$$

Za skúmané hamiltoniány označíme disperzné relácie (3.81) a (3.82).

Vlnová dĺžka laseru, ktorého svetlo budeme graficky znázorňovať bude opäť rovná hodnote (5.36). Za hodnotu I_0 vo vzťahu (5.56) dosadíme nasledujúcu hodnotu prúdu:

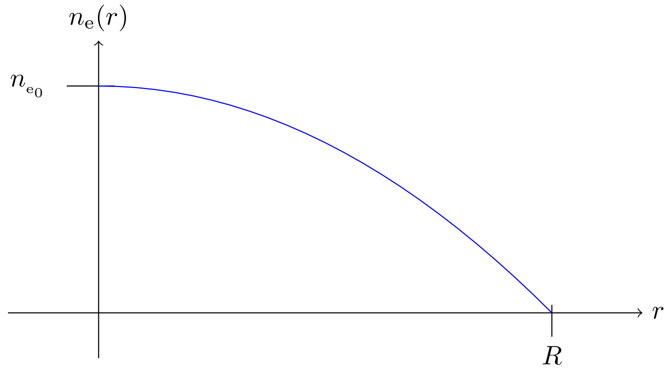
$$I_0 = 40 \text{ kA}. \tag{5.57}$$

Za profil koncentrácie zvolíme predpis

$$n_\mathrm{e}(r) = n_{e_0}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{pre } r \in (0, R), \tag{5.58}$$

zobrazený na Obr. 5.11. Za hodnotu n_{e_0} dosadíme

Obr. 5.11: Priebeh koncentrácie elektrónov $n_\mathrm{e}(r)$ v tvare (5.58)



$$n_{\mathrm{e}_0} = 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}. \tag{5.59}$$

Polomer pinču nech má veľkosť

$$R = 0,5\ \mathrm{mm}. \tag{5.60}$$

Veľkosti prúdu, elektrónovej koncentrácie a polomeru pinču a predpis pre elektrónovú koncentráciu sme čerpali z práce [34]. V práci je popísaný priebeh experimentu s uhlíkovým vláknom s polomerom 25 μm. Vybrané hodnoty boli dosiahnuté počas stavu stagnácie pinču. Stagnácia v experimente trvala niekoľko nanosekúnd až desiatky nanosekúnd, než začala explózia vlákna. Tento stav sa častokrát aproximuje rovnovážnym stavom z-pinču.

Pri uvážení vlnovej dĺžky (5.36), polomeru (5.60) a prúdu v pinči (5.57) môžeme vypočítať veľkosť $\omega_0 = eB_0/m_\mathrm{e}$ vzhľadom ku frekvencii prechádzajucej vlny

$$\omega_0 = 4 \cdot 10^{-4}\omega. \tag{5.61}$$

Pre pomer plazmovej frekvencie a frekvencie prechádzajúcej vlny platí

$$\omega_\mathrm{pe}(r) = 0,05 n_\mathrm{e}(r)\omega. \tag{5.62}$$

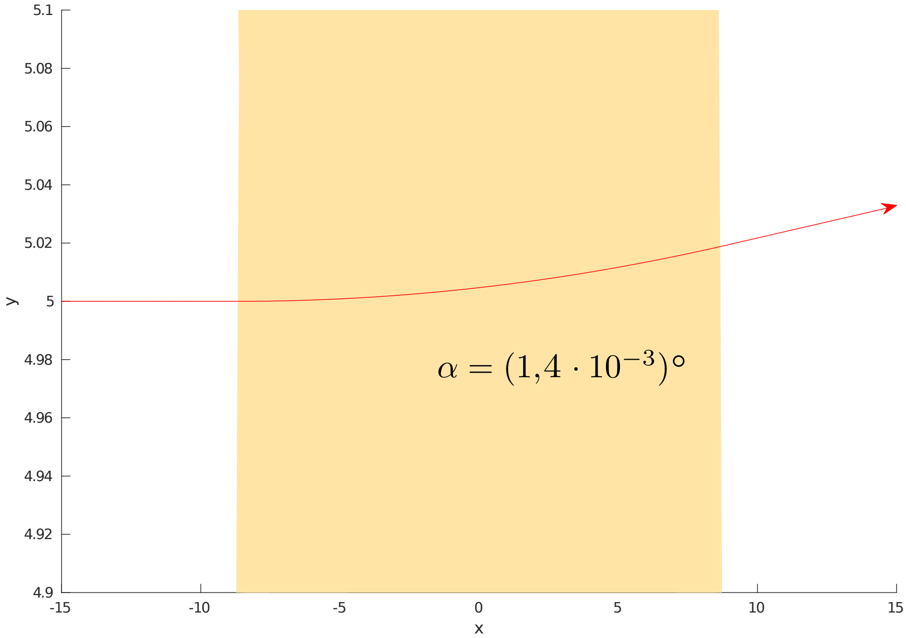
kde $n_\mathrm{e}(r)$ je v tvare (5.58). Voľba veľkosti polomeru pinču v Ray Tracingu bude ako v predošlom prípade $10k^{-1}$ a stred bude umiestnený v bode $(x, y) = (0, 0)$.

Lúč zobrazený na Obr. 5.12 sme vyslali z miesta $(x, y) = (-3R/2, R/2)$. Veľkosť uhlu odklonu α bola rovnaká pre hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) a pre hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33). Zaujímalo nás, či by extrémne veľké magnetické pole malo na ohyb lúča nejaký vplyv. Preto sme za B_0 dosadili $B_0 = 1000$ T. V práci [34] je skutočne spomenuté, že z-pinče sa môžu použiť na produkovanie až takto vysokých magnetických polí. Preto sme skúsili v Ray Tracingu použiť hodnotu

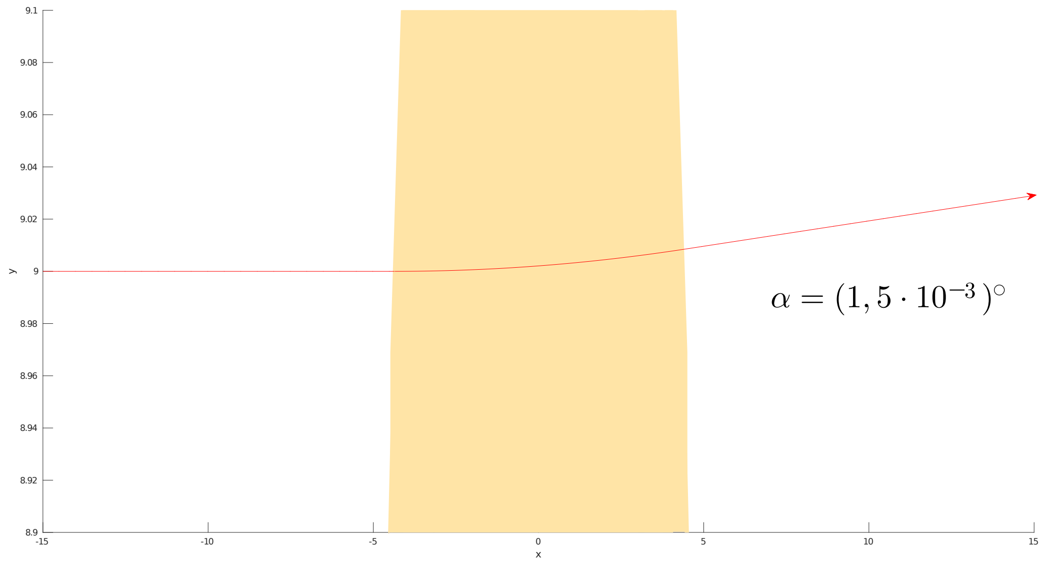
$$\omega_0 = 0,05\ \omega, \tag{5.63}$$

príslušnú spomínanému magnetickému poľu. Uhol ohybu to však stále nezmenilo.

Na Obr. 5.13 sme lúč vypustili z miesta $(x, y) = (-3R/2,\ 0,9R)$. Veľkosť uhlu odklonu α bola opäť rovnaká pre hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) s dosadením hodnôt (5.61) aj (5.63) a pre hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33).

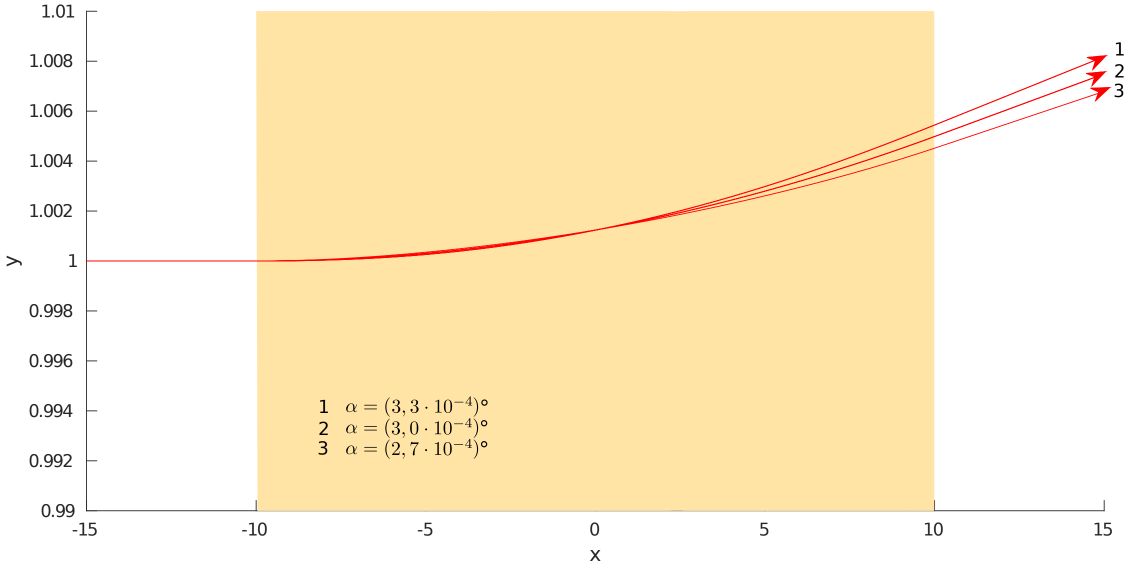


Obr. 5.12: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu s polomerom R a jeho odklon pod uhlom α.* Platí, že $\omega_{\mathrm{pe}} = 0,05\ \omega$. Použité boli hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) pre $\omega_0 = 4{\cdot}10^{-4}\omega$ a $\omega_0 = 0,05\ \omega$ a hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33). Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.



Obr. 5.13: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu s polomerom R a jeho odklon pod uhlom α.* Platí, že $\omega_{\mathrm{pe}} = 0,05\ \omega$. Použité boli hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) pre $\omega_0 = 4{\cdot}10^{-4}\omega$ a $\omega_0 = 0,05\ \omega$ a hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33). Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.

Na Obr. 5.14 sme lúč vypustili z miesta $(x, y) = (-3R/2,\ 0,1R)$. Veľkosť uhlu odklonu α bola opäť rovnaká pre hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) s dosadením hodnoty (5.61) a pre hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33). Ak sme však dosadili za ω_0 hodnotu (5.63), uhol odklonu sa narozdiel od ostatných disperzných relácii zmenil pre obidve disperzné relácie (3.81) a (3.82) o $0,3 \cdot 10^{-4}$ stupňa. Pri každej z nich sa však zmena prejavila opačným smerom odklonu.



Obr. 5.14: *Prechod lúča symetrickou plazmovou nehomogenitou v tvare kruhu s polomerom R a jeho odklon pod uhlom α.* Platí, že $\omega_{\mathrm{pe}} = 0,05\,\omega$. Pri zobrazení lúča 1 bol použitý hamiltonián v tvare (3.82) pre $\omega_0 = 0,05\,\omega$. Pri zobrazení lúča 2 boli použité hamiltoniány v tvare (3.81) a (3.82) pre $\omega_0 = 4 \cdot 10^{-4}\omega$ a hamiltonián príslušný riadnej vlne (5.33). Pri zobrazení lúča 3 bol použitý hamiltonián v tvare (3.81) pre $\omega_0 = 0,05\,\omega$. Oranžovou farbou je znázornená oblasť výskytu plazmy.

Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo preskúmať vplyv rôznych činiteľov na vysokofrekvenčný tenzor permitivity v plazme. Motiváciou k teoretickému rozboru spomínanej veličiny bolo predovšetkým vyhodnotenie správnosti bežne používaných vzťahov, v ktorých sa vplyvy ako magnetické pole, ióny a tlak zanedbávajú. Zaujímalo nás, či je táto aproximácia vhodná nielen z teoretického hľadiska, ale zároveň i to, aký vplyv môže mať na konkrétne experimentálne použitie.

Po úvodnej časti práce, v ktorej sme objasnili základy fyziky plazmy, sme preskúmali vplyv rôznych činiteľov na permitivitu plazmy. Najprv sme odvodili jej predpis pre chladnú plazmu, v ktorej magnetické pole, ióny a tlak častíc zanedbávame. Jedná sa o najčastejšie zaužívaný vzťah, ktorý je závislý iba od frekvencie prechádzajúcej vlny a plazmovej frekvencie elektrónov. V ďalšom odvodení sme zohľadnili aj pohybovú rovnicu iónovej tekutiny, ktorá sa obvykle zanedbáva kvôli vysokej hmotnosti iónov. Tieto ťažké častice nestíhajú vysokofrekvenčné deje sledovať. Ďalej sme sa pozreli na to, ako magnetické pole mení predpis permitivity plazmy. Magnetické pole spôsobuje anizotropiu a preto permitivita naberá tvar tenzoru, ktorého nenulové členy zapisujeme pomocou Stixových koeficientov. Ióny, ako nabité častice, sú magnetickým poľom taktiež ovplyvňované. Keď sme následne v odvodeniach zohľadnili vplyv iónov, zistili sme, že tenzor vykazuje ku svojim komponentom (elektrónom a iónom) aditivitu. Vplyv tlaku sme zohľadnili pre vlnu, ktorá má iba jednu nenulovú zložku v kartézskych súradniciach, zvlášť pre elektróny, a následne pre elektróny aj ióny, pričom magnetické pole sme zanedbali. Zistili sme, že prvky na diagonále sa vzájomne odlišujú. Preskúmali sme taktiež tvar tenzoru pre magnetické pole, ktoré má všetky kartézske zložky nenulové. Tenzor má v takom prípade všetky komponenty nenulové a nie je možné ho zapísať pomocou formalizmu Stixových koeficientov. Je potrebné dodať, že vo všetkých spomínaných odvodeniach sme zanedbali zrážky jednotlivých častíc.

To, že sme odvodili predpis pre tenzor permitivity, sme následne zúžitkovali k zisteniu tvarov disperzných relácií. Zistili sme, že elektromagnetická vlna sa môže v plazme bez pôvodného magnetického poľa šíriť ako riadna vlna závislá na vlnovom vektore, rýchlosti svetla a plazmovej frekvencii elektrónov. Spôsob šírenia elektromagnetickej vlny v prítomnosti magnetického poľa v plazme závisí na smere jej šírenia. Rovnobežne s magnetickým poľom sa môže šíriť ľavotočivá a pravotočivá vlna. Kolmo k pôsobiacemu magnetickému poľu sa disperzná relácia rozdeľuje na dve vetvy, na spomínanú riadnu vlnu a na mimoriadnu vlnu, ktorej šírenie okrem faktorov ovplyvňujúcich šírenie riadnej vlny ovplyvňuje ešte cyklotrónová frekvencia elektrónov. Zistili sme, aký vplyv má na pravotočivú, ľavotočivú vlnu, plazmové oscilácie a riadnu a mimoriadnu vlnu prítomnosť iónov. Pri zahrnutí tepelného pohybu častíc sme dospeli k záveru, že elektromagnetická vlna sa plazmou šíri nezávisle od plazmovej vlny. Nakoniec sme prišli na to, ako vyzerá predpis pre vlny šíriace sa plazmou s magnetickým poľom s dvomi nenulovými kartézskymi zložkami.

Grafické znázornenie Stixových koeficientov nám pomohlo potvrdiť predpoklad, že ťažké ióny šírenie vĺn vysokých frekvencií neovplyvňujú. Zreteľný vplyv na ich priebeh ako funkcie frekvencie má magnetické pole. Najvýraznejšie sa tento vplyv prejavuje v oblasti, kde je frekvencia prechádzajúcej elektromagnetickej vlny menšia ako plazmová frekvencia elektrónov. Pre šírenie riadnej vlny je táto oblasť nepodstatná, keďže sa v spomínanom rozpätí šíriť nemôže. Mimoriadnu vlnu môžu zmeny koeficientov ovplyvňovať na frekvenciách vyšších ako ľavá medzná frekvencia. So zvyšujúcou sa frekvenciou vlny sa Stixove koeficienty limitne približujú chovaniu vo vákuu.

Všetky vyššie uvedené poznatky sme v závere práce prakticky aplikovali. Ukázali sme, že pomocou disperznej relácie môžeme zistiť tvar Hamiltonových rovníc pre elektromagnetickú vlnu, analogický tým v klasickej mechanike. Pomocou grafickej metódy Ray Tracing sme tak boli schopní sledovať dráhu svetelného lúča a zároveň vypočítať veľkosť odklonu od pôvodného smeru po prechode plazmou, ktorý je dôležitý v experimentálnej metóde s názvom šlírová metóda. Uhol odklonu svetla je spôsobený zmenou gradientu koncentrácie elektrónov, a pomocou šlírovej metódy môžeme práve vďaka zisteniu jeho hodnoty určiť približnú veľkosť elektrónovej koncentrácie. Nás zaujímalo, či nemá na ohyb svetla okrem gradientu koncentrácie zároveň vplyv aj magnetické pole, ktoré by podľa predošlých zistení mohlo mať ako jediné z rozoberaných veličín viditeľný vplyv na ohyb svetla. Zamerali sme sa na laserové svetlo a na znázornenie prechodu riadnej a mimoriadnej vlny cez model θ-pinču. Pri použití konkrétnych experimentálnych hodnôt, ako veľkosť magnetického poľa a veľkosť elektrónovej koncentrácie, sme dospeli k výsledku, že riadna vlna sa v plazmatickom prostredí ohne pod identickým uhlom ako mimoriadna vlna. Zobrazili sme zároveň, ako azimutálne magnetické pole v z-pinči ovplyvní ohyb lúča. Opäť sme dospeli k tomu, že magnetické svetlo na ohyb lúča výrazne nepôsobí, a plazmou sa šíri ako riadna vlna. Pri vysokých magnetických poliach s veľkosťou okolo 1000 T, ktorá je podľa [37] hraničnou hodnotou v súčasných experimentoch so z-pinčami, sa vplyv poľa objaviť môže. Jedná sa však o malú zmenu v rámci toho istého rádu veľkosti uhla.

Preto záverom práce konštatujeme, že zanedbanie vplyvu magnetického poľa, iónov a tlaku v tenzore permitivity je v experimentálnom použití, špeciálne v šlírovej metode, adekvátne, a odporúčame naďalej predpokladať, že laserový lúč sa plazmou šíri ako riadna vlna neovplyvnená magnetickým poľom.

Matematický dodatok

V dodatku je možné najsť stručný prehľad teórie týkajúcej sa Fourierovej transformácie, ktorá súvisí s konkrétnou fyzikálnou aplikáciou v našej práci. Slúži na rýchlu orientáciu v texte a na vytvorenie asociácie s matematickou teóriou. Nezahŕňa komplexnú teóriu k tejto problematike a ani to nie je jej účelom. Hlbšie poznatky o Fourierovej transformácii je možné získať v niektorej z kníh venujúcich sa matematickej analýze, napr. v učebnici [38]. Z tejto učebnice sú citované všetky definície a vety uvedené v dodatku.

Definícia 1
Symbolom $L_1(a,b)$ označíme Hilbertov priestor všetkých funkcií definovaných skoro všade na (a,b), ktorých absolútna hodnota je integrabilná na (a,b), pričom platí

$$-\infty < a < b < \infty.$$

Definícia 2
Buď $f \in L_1(\mathbb{R}_m)$ komplexná funkcia (reálnej premennej). Jej (priamu) Fourierovu transformáciu $\hat{f}$ (píšeme tiež (Ff)), respektíve opačnú transformáciu $\check{f}$ (píšeme tiež $(F_{-1}f)$) definujeme predpismi:

$$\hat{f}(\xi) = (Ff)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbb{R}_m} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\xi)} \mathrm{d}x, \tag{5.64}$$

$$\check{f}(\xi) = (F_{-1}f)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbb{R}_m} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x,\xi)} \mathrm{d}x. \tag{5.65}$$

Vidíme, že v našom prípade (1.5) prevádzame Fourierovu transformáciu funkcií $\psi(t,\mathbf{x})$ a $a(\omega,\mathbf{k})$, pričom ω je na $\mathbf{k}$ závislá, preto stačí integrovať cez $\mathbf{k}$.

Ukážeme si najprv formálne, ako môžeme tieto výrazy získať pomocou Fourierovej transformácie.

Veta 1 (derivácia Fourierovej transformácie, Fourierova transformácia derivácie)
a) Nech $f \in L_1(\mathbb{R}_m)$, $x_j \cdot f \in L_1(\mathbb{R}_m)$ pre nejaké j (j=1,2,...m).
Potom funkcia $\hat{f}$ má deriváciu podľa ξ_j a platí

$$(\frac{\partial}{\xi_j}\hat{f})(\xi) = (\widehat{ix_j \cdot f})(\xi). \tag{5.66}$$

b) Nech pre nejaké j platí $f \in L_1(\mathbb{R}_m) \cap C(\mathbb{R}_m)$, $\frac{\partial f}{x_j} \in L_1(\mathbb{R}_m) \cap C(\mathbb{R}_m)$.
Potom platí

$$(\widehat{\frac{\partial f}{\xi_j}})(\xi) = -i\xi_j \cdot \hat{f}(\xi). \tag{5.67}$$

Literatúra

[1] KULHÁNEK, Petr. *Úvod do teorie plazmatu.* AGA (Aldebaran Group for Astrophysics), 2011. ISBN 978-80-904582-2-2.

[2] MIKULČÁK Jiří, KLIMEŠ Bohdan, ŠIROKÝ Jaromír, ŠÚLA Václav a ZEMÁNEK František. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro strední školy.* Dotisk 1. vyd. Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1988.

[3] KULHÁNEK, Petr. *Blýskání.* AGA (Aldebaran Group for Astrophysics), 2011. ISBN 978-80-904582-3-9.

[4] SEDLÁK, Bedřich a ŠTOLL, Ivan. *Elektřina a magnetizmus.* Vyd. 2. opravené a rozšířené. Academia, nakladatelství Akademie věd, 2002.

[5] CHEN, F. F. *Introduction to Plasma Physics.* New York: Plenum Press, 1974.

[6] LEPIL, Oldřich a ŠEDIVÝ Přemysl. *Fyzika pro gymnázia.* Elektřina a magnetizmus. Dotisk 5. vyd. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-385-1.

[7] WAGNER, Vladimír. *Příklady na cvičení při přednášce „Základy jaderné fyziky"* [online]. [cit. 10.4.2016]. Dostupné z: https://ojs.ujf.cas.cz/ wagner/prednasky/subatom/powerpoint/Priklady.htm.

[8] *Plasma calculator.* [online]. [cit. 10.4.2016]. Dostupné z: http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/research/cfsa/people/erwin/teaching/px384l/calculator/.

[9] *Answers to problem sheet.* [online]. [cit. 12.10.2014]. Dostupné z: http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/current/teach/module _home/px384/answers_sheet.pdf.

[10] STIX, Thomas Howard. *Waves in plasmas.* New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1992.

[11] BARTUŠKA, Karel a SVOBODA, Emanuel. *Fyzika pro gymnázia.* Molekulová fyzika a termika. Dotisk 5. vyd. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-383-7.

[12] BALKOVÁ, Lubomíra a HUMHAL, Emil. *Lineární algebra 2.* [online]. Praha, 11.6.2012. [cit. 7.5.2016]. Dostupné z: http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/ balkolub/Vyuka/leto2012/main.pdf.

[13] ŠTOLL, Ivan. *Mechanika.* Vyd. 2. Vydavatelství ČVUT, 2003.

[14] MCCRACKEN, Garry a STOTT, Peter. *Fúze.* Energie vesmíru. 6. vyd. Preložili M. ŘÍPA a J. MLYNÁŘ. Praha: Mladá fronta, 2006. 328 s+16 s príloh. Kolumbus, zv. 183. ISBN 80-204-1453-3.

[15] DOLAN, Thomas. *PINCHES AND COMPACT TORUSES* . [online]. [cit. 7.5.2016]. Dostupné z: http://www.sunist.org/shared%20documents/Fusion%20Research%20Course%20by%20Thomas%20Dolan/Chapters%20pdf%20original%20images%20with%20hidden%20text/Chapter%2012.pdf.

[16] LIBRA, Martin, MLYNÁŘ Jan a POULEK Vladislav. *Jaderná energie.* 1.vyd. Praha: ILSA, 2012. 167 s. ISBN 978-80-904311-6-4.

[17] BEACH, A. D., et al. Temperature and density measurements in the midplane of a long theta pinch. *Nuclear Fusion.* 1969, 9.3: 215. Online ISSN 1741-4326.

[18] TRACY, E. R., BRIZARD, A. J., RICHARDSON, A. S. a KAUFMAN A. N. *Ray Tracing and Beyond, Phase Space Methods in Plasma Wave Theory.* United Kingdom: Cambridge University Press, 2014.

[19] FEYNMANN Richard P., LEIGHTON Robert B. a SANDS Matthew. *Feynamnnovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3.* 4. dotisk 1. vyd. Preložil I. ŠTOLL. Praha: Fragment, 2006. ISBN 978-80-7200-405-8.

[20] KULHÁNEK, Petr. *Teoretická mechanika.* [online]. 2. doplněné vydání. Praha: 2008 [cit. 29.4.2016]. Dostupné z: http://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf.

[21] ŠTOLL, Ivan a TOLAR, Jiří. *Teoretická fyzika.* Vydavatelství ČVUT, 1982.

[22] BERKHOUT, A. J., RIDDER, J. a VAN DER WAL L. F. *Acoustical Imaging.* Plenum Press, 1985.

[23] JIAO, Y., FAN, S. a MILLER, D. A. B. Designing for beam propagation in periodic and nonperiodic photonic nanostructures: Extended Hamiltonian method. *Physical Review E.* 2004, 70.3: 036612.

[24] RADEMACHER, Paul. *Ray Tracing: Graphics for the Masses.* Crossroads, 1997, 3.4: 3-7.

[25] ŠULC, Jan. *Úvod do laserové techniky.* Laser. [online]. Praha, 29.10.2012 [cit. 7.5.2016]. Dostupné z: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ult/ult_sl_06.pdf.

[26] SLUIJTER, Maarte. *Ray-optics analysis of inhomogeneous optically anisotropic media.* 2010.

[27] ORŠANSKÝ, Pavol. *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc* [online]. [cit. 2.7.2015]. Dostupné z: http://fstroj.uniza.sk/kam/orsansky/pdf/numericke_riesenie_diferencialnych_rovnic.pdf.

[28] KIMURA, Toshinori. *On Dormand-Prince Method* [online]. 24.9.2015. [cit. 20.5.2016]. Dostupné z: http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/DormandPrince_19856.pdf.

[29] ĎURDINA, Lukáš. *Metody vizualizace proudění.* Bakalárska práca. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Vedúci práce Ing. František LÍZAL.

[30] BÁLEK, Rudolf a KOBL, Lukáš. Zobrazování ultrazvukových polí v proudícím plynu z jehly. *Akustické listy.* Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISSN:1212-4702

[31] SETTLES, Gary S. *Schlieren and Shadowgraph Methods in Heat and Mass Transfer*. Springer Science & Business Media, 2012.

[32] URUBAL, Václav. *Optické metody využívající změn hustoty média.* [online]. [cit.5.5.2016]. Dostupné z: http://www.it.cas.cz/ uruba/docs/ZIE/hustota.pdf.

[33] The MathWorks, Inc. *Choose an ODE Solver.* [online]. 1994-2016. [cit. 20.5.2016]. Dostupné z: http://www.mathworks.com/help/matlab/math/choose-an-ode-solver.html?searchHighlight=choosing%20ode%20matlab.

[34] KLÍR, Daniel. *The Study of a Fibre Z-Pinch.* Praha, 2005. Dizertačná práca. Czech Technical University in Prague. Vedúci práce prof. RNDr. Pavel Kubeš, CSc.

[35] SCHNACK, Dalton. *Simple MHD equilibria.* [online]. [cit. 20.5.2016]. https://www.physics.wisc.edu/grads/courses/726-f07/files/Section_15_Simple_Eq_01.pdf.

[36] KUBEŠ, Pavel. *Impulzní silnoproudé výboje a jejich diagnostika.* Studijní text pro doktorské studium [online]. Praha: 2014. [cit.2.7. 2015]. Dostupné z: http://www.aldebaran.cz/studium/vyboje.pdf.

[37] HAINES, M. G. A review of the dense Z-pinch. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2011, 53.9: 093001.

[38] KOPÁČEK, Jiří a kolektív. *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [IV].* Praha: MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2009.