Newtonova mechanika hmotných bodů

Newtonovy zákony (1687) (původně formulované v Newtonově absolutním prostoru)

1. NZ Těleso (hm. bod) na které nepůsobí vtištěné síly (pravé síly u kterých lze určit původce) se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Rovnoměrný přímočarý pohyb – v kartézských souřadnicích $x_i(\lambda) = v_{0i}\lambda + x_{0i} \iff \dot{x}_i(\lambda) = v_{0i} \iff \ddot{x}_i(\lambda) = 0 \quad \forall i\ \forall \lambda$

Inerciální vztažná soustava – soustava v níž platí 1. NZ (tj. pro bezsilové hm. body $\ddot{\vec{x}}(\lambda) = 0$)

např. soustava spojená se stálicemi, soustava spojená se Zemí (je pro děje s trvající << 24h)

Transformace mezi inerciálními soustavami $\langle \sigma, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) \rangle$ a $\langle \tilde{\sigma}(\lambda), (\vec{\tilde{e}}_1(\lambda), \dots, \vec{\tilde{e}}_m(\lambda)) \rangle$

$\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma + \vec{w}(\lambda)$

$\vec{\tilde{e}}_j(\lambda) = \vec{e}_i S^i{}_j(\lambda)$

$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\lambda) \in SO(3)$

$\ddot{\vec{x}}(b) = 0 \iff \ddot{\tilde{\vec{x}}}(b) = 0$

$$\tilde{x}_i = S_{ji}(x_j - x_j(\tilde{\sigma}))$$

$$\tilde{\vec{x}} = \mathbb{S}^T(\vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma})) \quad / \mathbb{S}$$

$$\mathbb{S}\tilde{\vec{x}} = \vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma}) \quad / \frac{d}{d\lambda}$$

$$\dot{\mathbb{S}}\tilde{\vec{x}} + \mathbb{S}\dot{\tilde{\vec{x}}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}(\tilde{\sigma}) \quad / \frac{d}{d\lambda}$$

$$\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec{x}} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec{x}}} + \mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec{x}}} = \ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{x}}(\tilde{\sigma})$$

1) $b = \tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\vec{x}} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(\tilde{\sigma}) = 0 \Rightarrow \vec{w}(\lambda) = \vec{W}\lambda + \vec{x}_0$ počátek se pohybuje

2) $\tilde{\vec{x}} = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{\mathbb{S}}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda$ $\quad \tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma + \vec{W}\lambda + \vec{x}_0$ rovnoměrně přímočaře

3) $\dot{\tilde{\vec{x}}} = \text{konst.} \Rightarrow \dot{\mathbb{S}}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda$ $\quad \vec{\tilde{e}}_j = \vec{e}_i S^i{}_j$ osy se neotáčí

Galileiho transformace $\boxed{\begin{aligned}\tilde{\vec{x}} &= \mathbb{S}^T(\vec{x} - \vec{w}t - \vec{x}_0)\\ \tilde{t} &= t - t_0\end{aligned}}$ je dána 10 parametry $(\mathbb{S}, \vec{w}, \vec{x}_0, t_0) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(t-t_0)}$$

Grupa $SGal(3) \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3))$ $\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T & t_0 \\ \vec{w} & \mathbb{S}^T & \vec{x}_0 \\ 0 & \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ \vec{w}t + \mathbb{S}^T\vec{x} + \vec{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Galileiho princip relativity Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

2. NZ Změna pohybu je úměrná vtištěné síle a nastává ve směru přímky, podél níž síla působí.

v inerciální soustavě $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ pro m konst. $m\vec{a} = \vec{F}$ v kartézských souřadnicích $m\ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \hat{3}$

v neinerciální soustavě $m\ddot{\tilde{x}}_i = \tilde{F}_i + \tilde{Z}_i$ zdánlivé (setrvačné) síly

$$m\ddot{\vec{x}} = m[\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec{x}} + 2\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec{x}}} + \mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec{x}}} + \ddot{\vec{X}}(\tilde{t})] = \vec{F} = \mathbb{S}\tilde{\vec{F}} \quad / \mathbb{S}^T = \mathbb{S}^{-1}$$

označíme $\tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$

$$m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec{x}} + m2\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec{x}}} + m\mathbb{S}^T\mathbb{S}\ddot{\tilde{\vec{x}}} + m\mathbb{S}^T\ddot{\vec{X}}(\tilde{t}) = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{F}} = \tilde{\vec{F}}$$

$$\mathbb{S}^T\mathbb{S} = \mathbb{1} \quad / \frac{d}{dt} \qquad \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} + \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$$

$$\boxed{m\ddot{\tilde{\vec{x}}} = \tilde{\vec{F}} - m\mathbb{S}^T\ddot{\vec{X}}(\tilde{t}) - 2m\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\tilde{\vec{x}}} - m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\tilde{\vec{x}}}$$

$$\tilde{\omega}^T = (-\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^T = -\dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S} = \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde{\omega}$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} - m\mathbb{S}^T\ddot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) - 2m\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\vec{x}} - m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\vec{x}}$$

označíme $\tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}$

v pravotočivé ON bázi (Hodgeův duál) $\vec{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix}\omega_{23}\\ -\omega_{13}\\ \omega_{12}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\omega} = \begin{pmatrix}0 & \omega_{12} & \omega_{13}\\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix}$ antisymetrická matice má tři nezávislé složky

$$\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k$$

$$\varepsilon_{ijl}\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k = 2\delta_{lk}\tilde{\Omega}_k = 2\tilde{\Omega}_l$$

Úhlová rychlost

$$\boxed{\tilde{\Omega}_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\tilde{\omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lij}(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}}$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace soustavy $\langle\tilde{\sigma},\tilde{B}\rangle$ vůči soustavě $\langle\sigma,B\rangle$ v bázi $\tilde{B}$

Dále $\tilde{\omega}_{ij}\tilde{y}_j = \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k\tilde{y}_j = -\varepsilon_{ikj}\tilde{\Omega}_k\tilde{y}_j = -(\vec{\tilde{\Omega}}\times\vec{\tilde{y}})_i$ tj. $\tilde{\omega}\vec{\tilde{y}} = -\vec{\tilde{\Omega}}\times\vec{\tilde{y}}$

členy:

$-2m\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\dot{\vec{x}} = 2m\tilde{\omega}\dot{\vec{x}} = -2m\vec{\tilde{\Omega}}\times\dot{\vec{x}} = \vec{F}_c$ Coriolisova síla

$-m\mathbb{S}^T\ddot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) = \vec{F}_s$ Setrvačná síla

$$\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})^{\cdot} - \dot{\mathbb{S}}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde{\omega}} - \dot{\mathbb{S}}^T\mathbb{S}\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde{\omega}} + \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\,\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega}\tilde{\omega}$$

Odstředivá síla

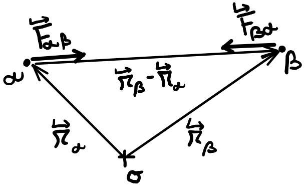
$$-m\mathbb{S}^T\ddot{\mathbb{S}}\vec{x} = -m(-\dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega}\tilde{\omega})\vec{x} = m\dot{\tilde{\omega}}\vec{x} - m\tilde{\omega}\tilde{\omega}\vec{x} = -m\dot{\vec{\tilde{\Omega}}}\times\vec{x} - m\vec{\tilde{\Omega}}\times(\vec{\tilde{\Omega}}\times\vec{x}) = \vec{F}_e + \vec{F}_o$$

Eulerova síla

Pozn. Síly Newtonovy mechaniky

gravitační síla $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\varkappa\dfrac{m_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = -\vec{F}_{\beta\alpha}$

elastická síla $\vec{F}_{\alpha\beta} = -k(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = -\vec{F}_{\beta\alpha}$



3. NZ Akce a reakce – vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří opačnými směry.

slabá verze $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$

silná verze – síli jsou navíc centrální $(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$
(působí podél spojnice bodů)

Newtonova mechanika soustav hmotných bodů pro $N \in \mathbb{N}$ volných hmotných bodů v inerciální soustavě

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \underbrace{m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha}_{\text{bez sumace}} = \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha \in \hat{N}$$

Celková hybnost $\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha$

celková vnější síla

$$\dot{\vec{P}} = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} -\vec{F}_{\beta\alpha} = -\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$$

3. NZ slabá verze

1. Věta Impulsová

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}}$$

Transformace souřadnic $\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{r}(O')$
$(S = \mathbb{1})$ $\vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{V}(t)$

$$\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha (\vec{v}'_\alpha + \vec{V}) = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{V} = \vec{P}' + M\vec{V}$$

V soustavě kde $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M}$ je celková hybnost $\vec{P}' = 0$

Hmotný střed $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$ $\quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}}$

Celkový moment hybnosti $\vec{L} = \sum_\alpha \vec{l}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$

celkový moment vnějších sil

$$\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha (\dot{\vec{r}}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha) = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} = \vec{N}^{(e)}$$

2. Věta Impulsová

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)}}$$

$$\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha} \qquad \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = -\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha} = 0$$

3. NZ silná verze

Celková kinetická energie $T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$

vnější síly, vnitřní síly, výkon vnějších sil

$$\dot{T} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha 2 \vec{v}_\alpha \cdot \dot{\vec{v}}_\alpha = \sum_\alpha \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \sum \vec{F}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha (\vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}) \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \vec{v}_\alpha + \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha = Q^{(e)} - \dot{U}$$

Jsou-li vnitřní síly konzervativní $\vec{F}_\alpha^{(i)} = -\nabla_\alpha U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \Leftrightarrow F_{\alpha j}^{(i)} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha j}}$ pak $\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(i)} \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = -\frac{dU}{dt}$

Celková energie $E = T + U$ $\qquad \frac{dE}{dt} = \frac{d(T+U)}{dt} = Q^{(e)}$ Věta o mechanické energii

Transformace souřadnic $\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{r}(0')$

$\vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{V}(t)$

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v}'_\alpha + \vec{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}'^2_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}'_\alpha \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{V}^2 = T' + \vec{P}' \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} M \vec{V}^2$$

V soustavě hmotného středu ($\vec{P}' = 0$) $\boxed{T = T'_{HMS} + \frac{1}{2} M \vec{V}_{HMS}^2}$ Kőnigova věta

Izolovaná soustava hmotných bodů — nepůsobí na ni žádné vnější síly ($\vec{F}_\alpha^{(e)} = 0 \quad \forall \alpha \in \hat{N}$)

$\dot{\vec{P}} = 0$ ZZ celkové hybnosti

$\dot{\vec{L}} = 0$ ZZ celkového momentu hybnosti

$\dot{E} = 0$ ZZ celkové mechanické energie

$M\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{V} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0$

rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

celkem 10 zákonů zachování

Věta o viriálu (1870 Rudolf Clausius) — vztah pro střední časovou hodnotu kinetické energie

Střední časová hodnota funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(t)$ $\quad \langle f \rangle = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,dt$

Věta: Pokud $\exists F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, F omezená $(\exists K \in \mathbb{R},\ |F(t)| \leq K,\ \forall t)$ pak $\langle f \rangle = \langle \dot{F} \rangle = 0.$

Důkaz: $|\langle f \rangle| = \lim_{\tau \to +\infty} \left| \frac{1}{\tau}(F(\tau) - F(0)) \right| \leq \lim_{\tau \to +\infty} \left| \frac{2K}{\tau} \right| = 0$

Homogenní funkce stupně $k \in \mathbb{N}$ je funkce $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f = f(\vec{x})$ taková, že $\forall \lambda > 0$ platí $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x})$

Eulerova věta pro homogenní funkce stupně k $\quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} x_j = k f(\vec{x})$

Důkaz: $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\lambda\vec{x})}{\partial(\lambda x_j)} x_j = k\lambda^{k-1} f(\vec{x}) \quad / \lambda = 1$

Značení: pro funkci $Z = Z(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m,t)$, $Z:\mathbb{R}^{6m+1}\to\mathbb{R}$ a funkce $\vec{\tilde{x}}_\alpha = \vec{\tilde{x}}_\alpha(t)$ $\forall\alpha\in\hat{N}$

označíme $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) = Z(\vec{\tilde{x}}_1(t),\dots,\vec{\tilde{x}}_m(t),\dot{\vec{\tilde{x}}}_1(t),\dots,\dot{\vec{\tilde{x}}}_m(t),t)$, $\tilde{Z}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ složenou funkci

Věta o viriálu: Označme $G=\sum_{\alpha=1}^{m}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{x}_\alpha$ a $T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}m_\alpha\vec{v}_\alpha^{\,2}$ pak pro libovolné řešení $\vec{\tilde{x}}_\alpha=\vec{\tilde{x}}_\alpha(t)$ Newtonových pohybových rovnic $m_\alpha\ddot{\vec{x}}_\alpha=\vec{F}_\alpha$ $\forall\alpha\in\hat{N}$ platí $\left\langle\frac{d\tilde{G}}{dt}\right\rangle=0 \Rightarrow \langle\tilde{T}\rangle = \underbrace{-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{\tilde{F}}_\alpha\cdot\vec{\tilde{x}}_\alpha\right\rangle}_{\text{viriál}}$

Důkaz: $2\tilde{T}=\sum_\alpha m_\alpha\dot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha^{\,2}=\left(\sum_\alpha m_\alpha\dot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha\cdot\vec{\tilde{x}}_\alpha\right)^{\cdot}-\sum_\alpha m_\alpha\ddot{\vec{\tilde{x}}}_\alpha\cdot\vec{\tilde{x}}_\alpha=\dot{\tilde{G}}-\sum_\alpha\vec{\tilde{F}}_\alpha\cdot\vec{\tilde{x}}_\alpha$

Jsou-li navíc síly $\vec{F}_\alpha$ potenciální tj. $\vec{F}_\alpha=-\nabla_\alpha U=-\frac{\partial U}{\partial\vec{x}_\alpha}$ a potenciál $U=U(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,t)$ je homogenní funkce stupně k v proměnných $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N$ pak $\langle\dot{\tilde{G}}\rangle=0 \Rightarrow \langle\tilde{T}\rangle=\frac{k}{2}\langle\tilde{U}\rangle$

Důkaz: $\sum_\alpha\vec{\tilde{F}}_\alpha\cdot\vec{\tilde{x}}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\tilde{F}_{\alpha_i}x_{\alpha_i}=-\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha_i}}x_{\alpha_i}=-kU$

Označíme-li $E=T+U$ pak $\langle\tilde{E}\rangle=\langle\tilde{T}\rangle+\langle\tilde{U}\rangle=\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle\tilde{U}\rangle$ a platí $\langle\tilde{U}\rangle=\frac{2}{k+2}\langle\tilde{E}\rangle$

$\langle\tilde{T}\rangle=\frac{k}{k+2}\langle\tilde{E}\rangle$

Je-li navíc $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ pak $\tilde{E}=$ konst. je celková energie a $\langle\tilde{E}\rangle=E$