

TeF1 ZKP

1. Ukažte, že pro libovolné vektorové pole $\vec{A} = \vec{A}(x_1, x_2, x_3)$ se veličina $\vec{B} := \text{rot} \vec{A}$ transformuje, při vlastních ortogonálních transformacích $\mathbb{S} \in SO(3)$, jako vektorové pole.
2. Odvoďte Lagrangeovu funkci v obecných souřadnicích a odpovídající pohybové rovnice pro soustavu tvořenou dvěma hmotnými body spojenými nehmotnou ideální pružinou (délka nezátížená pružiny je 0) tuhosti K , z nichž první o hmotnosti m_1 je vázán na rotační paraboloid s osou z popsáný rovnicí $x^2 + y^2 + z = 0$ a druhý o hmotnosti m_2 na přímku, která prochází počátkem, je kolmá na osu z a kolem osy z se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω . Celá soustava se nachází v homogenním tíhovém poli směřujícím proti směru osy z .
3. Dokažte, že funkce $F_i = m(\dot{x}_i \dot{x}_j \dot{x}_j - x_j \dot{x}_j \dot{x}_i) - \alpha \frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}$ je pro libovolné $i = 1, 2, 3$ integrálem pohybu pro jednu částici v \mathbb{R}^3 popsanou Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{x_j x_j}}.$$

Najděte a zdůvodněte alespoň dva další nezávislé integrály pohybu. Je tato Lagrangeova funkce invariantní vůči rotaci kolem osy x_3 ? Pokud ano, najděte odpovídající integrál pohybu.

4. V homogenním tíhovém poli intenzity g se nachází soustava tvořená nehybným válcem o poloměru r s osou kolmou na intenzitu pole, homogenní obručí hmotnosti M a poloměru R obepínající válec a homogenní tuhou tyčí hmotnosti m a délky l jejíž jeden konec je vázán na obruč. Uvažujte pohyb obruče a tyče pouze ve svislé rovině xy . Určete počet stupňů volnosti a najděte obecné souřadnice pro tuto soustavu v případě, že:
 - a) obruč se po válci smýká bez tření
 - b) obruč se po válci smýká bez tření a konec tyče je vázán na jeden bod obruče
 - c) obruč se po válci odvaluje bez prokluzování
 - d) obruč se po válci odvaluje bez prokluzování a konec tyče je vázán na jeden bod obručePro případ s nejnižším počtem stupňů volnosti sestavte Lagrangeovu funkci v obecných souřadnicích naleznete úhlové frekvence malých kmitů této soustavy kolem její stabilní rovnovážné polohy, ve které je tyč ve svislé poloze pod obručí.

