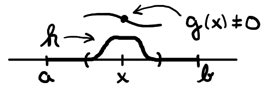
Základní lemma variačního počtu: Buď $g \in C\langle a,b\rangle$ pokud $\forall h \in C^{(n)}_{(0,0)}\langle a,b\rangle$ platí $\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = 0$ pak $g(x)=0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Dk. sporem 

Dále speciální případ funkcionálu:

Buď $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ třídy $C^{(2)}$ pak funkcionál $J: C^{(1)}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\,dx$ je diferencovatelný na $C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J(\varphi+\varepsilon\delta\varphi) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,\varphi+\varepsilon\delta\varphi,\varphi'+\varepsilon\delta\varphi')\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi,\varphi')\delta\varphi'\,dx =$$

$$\boxed{\delta\int_a^b F\,dx = \int_a^b \delta F\,dx}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\delta\varphi\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)\right]\delta\varphi\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\delta\varphi\right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle$ je extremálou funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle} \iff \boxed{\frac{\partial F}{\partial\varphi}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right) = 0}$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

Eulerova rovnice pro funkcionál J

ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$

Zobecnění:

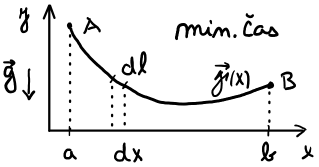
$\vec{\varphi}: \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s \in C^{(1)}$ $\vec{\varphi}(a)=\vec{A}$ $\vec{\varphi}(b)=\vec{B}$

$F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R} \in C^{(2)}$ $J(\vec{\varphi}) = \int_a^b F(x,\vec{\varphi}(x),\vec{\varphi}'(x))\,dx$ $\delta J(\vec{\varphi}) = 0 \wedge \delta\vec{\varphi}(a) = 0 = \delta\vec{\varphi}(b) \iff \forall i \in \hat{s}$ $\frac{\partial F}{\partial\varphi_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i'}\right) = 0$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$

Je–li $\vec{\varphi}$ minimála (maximála) funkcionálu $J\big|_{C^{(1)}_{(A,B)}\langle a,b\rangle}$ pak $\delta^2 J(\vec{\varphi}) \geq 0$ (≤ 0) a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_i'\partial\varphi_j'}\right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy** – jsou globální vyšetřují trajektorii v intervalu ⟨t1, t2⟩ jako celek
  – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův pricnip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze



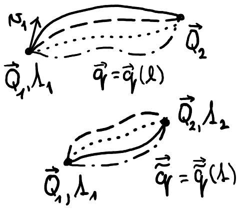
která extremalizuje funkcionál $T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B n(\vec{x})\,dl = \frac{1}{c}\int_a^b n(\vec{y}(x))\cdot|\vec{y}'(x)|\,dx$

index lomu $n = n(\vec{x})$ rychlost světla c

Brachistochrona (Johann Bernouli 1696) $T(\vec{y}) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v(y)} = \int_a^b \frac{|\vec{y}'(x)|\,dx}{\sqrt{2gy}} = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$

Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

Princip nejmenší akce	– Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy – Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy



$E = T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) + U(\vec{q})$ $S_0 = \int_{Q_1}^{Q_2} 2T\,dt$

$\Rightarrow v(\vec{q}) \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(t)$

$T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ $S = \int_{t_1}^{t_2} T - U\,dt$

$U(\vec{q},t)$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip

budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta\vec{q} = \delta\vec{q}(t) \in C^{(1)}_{(0,0)}\langle t_1,t_2\rangle$ tvoří tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^{(1)}\langle t_1,t_2\rangle$ s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\hat{L}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_j^{(nep)}\delta q_j\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(\delta\hat{L} + Q_j^{(nep)}\delta q_j)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ se děje po křivce (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)\,dt}$$

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta\vec{q}(t)\Big|_{t_1,t_2} = 0 \iff \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál S

O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$ s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1$ $\vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S: C^{(1)}_{(\vec{Q}_1,\vec{Q}_2)}\langle t_1,t_2\rangle \to \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic $\Rightarrow$ LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangeiánu $L' = L + \frac{\hat{d}\,h(\vec{q},t)}{dt}$ $S' = \int_{t_1}^{t_2} L'\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + [h(\vec{q}(t_2),t_2) - h(\vec{q}(t_1),t_1)] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)

Routhova funkce – vyloučení cyklické souřadnice Q $\quad \boxed{L,\ s+1,\ \vec q, Q} \to \boxed{R,\ s,\ \vec q}$

nechť $L = L(\vec q, \dot{\vec q}, \dot Q, t)$ $\quad \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, \dot Q, t) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot Q = \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)$

do zbylých s rovnic $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \forall i \in \hat s$ dosadíme za $\dot Q$ a $\ddot Q$ tyto rovnice pro neznámé $\vec q, \dot{\vec q}, \ddot{\vec q}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec q, \dot{\vec q}, P, t) = \hat L - P\hat{\dot Q} = L(\vec q, \dot{\vec q}, \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t), t) - P\hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)$ (někdy $R = P\hat{\dot Q} - \hat L$)

která převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o s stupních volnosti

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat L}{\partial \dot q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i}\right) - \left(\frac{\partial \hat L}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot Q}\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial \dot q_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot Q}\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i} - P\frac{\partial \hat{\dot Q}}{\partial q_i}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]_{\dot Q = \hat{\dot Q}(\vec q, \dot{\vec q}, P, t)}$$

Jacobiho princip – pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$L(\vec q, \dot{\vec q}) = \frac{1}{2}T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j - U(\vec q)$ $\quad T$ je P.D. kvadratická forma v $\dot{\vec q}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = T + U = konst$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec q(t), \dot{\vec q}(t))\, dt = \left| \begin{matrix} \text{substituce: změna parametrizace} \\ t = t(\tau) \quad \vec q(\tau) = \vec q(t(\tau)) \\ dt = t' d\tau \quad \vec q\,' = \frac{d\vec q}{d\tau} = \dot{\vec q}\, t' \end{matrix} \right| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\vec q, \frac{\vec q\,'}{t'}\right) t'\, d\tau$$

"nový" variační princip pro $s+1$ křivek $\vec q(\tau), t(\tau)$ s funkcí $\hat L(\vec q, \vec q\,', t') = L\left(\vec q, \frac{\vec q\,'}{t'}\right) t'$ kde čas t je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$p_t = \frac{\partial (L t')}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial t'} t' + L = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\left(-\frac{q'_k}{t'^2}\right) t' + L = -\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k + L = -p_k \dot q_k + L = -E$$

$$R = L t' - p_t t' = (L - p_t) t' = (L + p_k \dot q_k - L) t' = p_k \dot q_k t' = (L + E) t' = (T - U + T + U) t' = 2T t'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_k \dot q_k t'\, d\tau = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} p_k\, dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T t'\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T}\sqrt{2T}\, t'\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j}\, t'\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q)\dot q_i t' \dot q_j t'}\, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}}_{F(\vec q, \vec q\,')}\, d\tau \overset{q'_i d\tau = dq_i}{=} \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\,\underbrace{\sqrt{T_{ij}(\vec q)\, dq_i\, dq_j}}_{\text{element délky } dl^T \text{ v konf. pr. s metrickým tenzorem } T_{ij}(\vec q)}$$

Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi $\vec Q_1, \vec Q_2$ pohybuje po křivce na které zkrácená akce

$$S_0[\vec q(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\sqrt{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}\, d\tau = \int_{\vec Q_1}^{\vec Q_2} \sqrt{2(E - U(\vec q))}\, dl^T$$

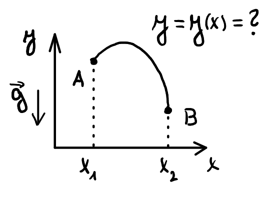
nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta\vec q(\tau_{1,2}) = 0$.

Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q'_j}\right) = 0 \ \forall j \in \hat s \Rightarrow \vec q = \vec q(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

časovou parametrizaci trajektorie lze získat pomocí integrálu pohybu $E = T + U$ $\quad \Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E-U)}}$

$$t = \int_0^t 1\, d\tilde t = \int_0^t \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j}{2(E - U(\vec q))}}\, d\tilde t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{T_{ij}(\vec q) q'_i q'_j}{2(E - U(\vec q))}}\, d\tau$$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) - mgy$ $\quad U = mgy$ $\quad T = \frac{1}{2}(\dot x, \dot y)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}$ $\quad E = T + U = konst$



$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(dx)^2 + m(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E - mgy)}\sqrt{m(1 + y'^2)}\, dx = \underbrace{\sqrt{2g}\, m}_{\text{konst.}} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}\sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y')}\, dx$$

parametrizace $y = y(x)$ $\quad dy = y' dx$

(tj. $\tau = x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ přejde na

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=C_1}\Big) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial x} - \left(y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = 0$$

$C_1 = F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ $\quad K = \frac{E}{mg}$

$C_1 = \sqrt{K - y}\sqrt{1 + y'^2} - y'\sqrt{K - y}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

$$C_1 = \frac{\sqrt{K - y}}{\sqrt{1 + y'^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{C_1}\sqrt{K - y - C_1^2} \Rightarrow \int \frac{1}{C_1}dx = \int \frac{y' dx}{\sqrt{K - y - C_1^2}} \Rightarrow \frac{x}{C_1} = 2\sqrt{K - y - C_1^2} + \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow (x - C_2)^2 = 4C_1^2\left(\frac{E}{mg} - C_1^2 - y\right)$$