Cvičení 1 *Definice* δ_{ij}, ε_{ijk}, *Einsteinovo sumační pravidlo,* δ_{ii}, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}$.

Cvičení 2 *Pomocí Einstenova sumačního pravidla dokažte následující indetity:*

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

Cvičení 3 *Zopakujte si větu o derivovování složené funkce více proměnných (řetězové pravidlo). Vysvětlete podrobně schematický vzorec*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

Cvičení 4 *Dokažte identitu*

$$\triangle\varphi(r) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}$$

Cvičení 5 *Řešte jednoduché diferenciální rovnice*
(1) $y' = f(x)$, *(2)* $y' = f(y)$, *(3)* $y'' = f(x)$, *(4)* $y'' = f(y')$, *(5)* $y'' = f(y)$,
kde $y = y(x)$ *a* f *je libovolná spojitá funkce.*

Cvičení 6 ** Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro harmonický oscilátor, kde* $\vec{F}(\vec{x}) = -k\,\vec{x}$

Cvičení 7 *Odvoďte inverzní vztah k*

$$x^j(b) = S^j{}_i(\tilde{x}^i(b) - \tilde{x}^i(o)), \tag{1}$$

t.j. $\tilde{x}^i(b)$ *jako funkci* $x^i(b)$ *a* $x^i(\tilde{o})$.

Cvičení 8 *Nechť složky veličiny* $\mathbf{A}$ *v bazi* $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mají hodnoty* $(1,2,3)$ *a složky veličiny* $\mathbf{B}$ *v téže bazi mají hodnoty* $(4,5,6)$.

V bazi $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)$ *má tatáž veličina* $\mathbf{A}$ *složky* $(2,0,-1)$ *a veličina* $\mathbf{B}$ *složky* $(15,5,-2)$.

Je veličina $\mathbf{A}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor? Je veličina* $\mathbf{B}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Pozn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9 *Nechť složky veličiny* $\mathbf{C}$ *v bazi* $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mají hodnoty* $(1,1,1)$ *a v bazi* $\tilde{\mathbf{e}}$ *z předchozího cvičení mají rovněž hodnoty* $(1,1,1)$. *Je veličina* $\mathbf{C}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Cvičení 10 *Nechť* $\mathbf{e}_j$ *jsou prvky ortonormální baze a* $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j F^j{}_i$, *kde* $F \in GL(n)$ *jsou prvky obecně neortonomální baze* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$. *Ukažte, že skalární součin* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *má v bazi* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, *a , tvar*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^i b^j g_{ij}, \tag{2}$$

kde $g_{ij} := F^k{}_i F^k{}_j$ *je Grammova matice souboru* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

Cvičení 11 *Ukažte, že prvky matice g_{ij} definující skalární součin (2) v obecné bazi lze považovat za složky kovariantního (tzv. metrického) tenzoru.*

Cvičení 12 *Transformace skalárního pole. Jakých hodnot nabývá elektrický potenciál soustavy dvou elektronů vzdálených od sebe na délku l ve vztažné soustavě:*
(o, e), kde o je bod ležící ve středu úsečky spojující elektrony a e je ortonormální soustava taková, že $\mathbf{e}_1$ směřuje ve směru spojnice obou elektronů a $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jsou na ní kolmé?
$(\tilde{o}, \tilde{e})$, kde $\tilde{o}$ je bod ležící ve vrcholu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je tvořena úsečkou spojující elektrony a $\tilde{e}$ je ortonormální soustava taková, že $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ směřují ve směru jednotlivých elektronů a $\tilde{\mathbf{e}}_3$ je na ně kolmá?
Uvědomte si, že ač funkce U a $\tilde{U}$ mají různý tvar, popisují stejné elektrické pole!

Cvičení 13 *Ukažte že pro libovolné skalární pole U se veličina grad U transformuje při ortogonálních transformacích jako vektorové pole.*

Cvičení 14 ** Ukažte že $\gamma = \det g_{ij}$, kde g_{ij} je matice definující skalární součin (2) v obecné bazi, je skalární hustota stupně 2.*

Cvičení 15 ** Ukažte že totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly v dimenzi n*

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots i_n} \in \{-1, 0, 1\}, \quad \varepsilon_{1,2,\ldots,n} = 1 \tag{3}$$

lze chápat jako složky $GL(n, R)$–invariantní kovariantní tenzorové hustoty váhy -1 a invariantní kontravariantní tenzorové hustoty váhy +1. Použijte definici determinantu matice.

Cvičení 16 ** Ukažte, že pokud $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ jsou kontravariantní vektory, pak jejich vektorový součin $\mathbf{A}_\omega$ je kontravariantní vektor.*

Cvičení 17 ** Nechť ω je orientace vektorového prostoru. Napište $\omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ ve složkách vektorů $\mathbf{v}_j$ v ortonormální i neortonomální bazi*

Cvičení 18 ** Ukažte, že $\mid \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid$ je obsah rovnoběžníka s hranami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a $\mid \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mid$ je objem rovnoběžnostěnu s hranami $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.*

Cvičení 19 ** Ukažte že v ortonormální pozitivně orientované bázi platí pro vektorový součin vzorec $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}_k$. Změní se vzorec v negativně orientované bázi?*

Cvičení 20 ** Rozeberte transformační vlastnosti jednotlivých veličin vystupujících v Lorentzově síle*

Cvičení 21 ** Spočítejte souřadnice vektorových součinů $[\mathbf{a}]$ ve V_2 a $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ve V_4.*

Cvičení 22 ** Napište jak se změní složky vektoru $\mathbf{V}$, pseudovektoru $\mathbf{A}_\omega$, tensorů $\mathbf{T}$, pseudotensorů $\mathbf{T}_\omega$ a tensorových hustot při "inversi os".*

Cvičení 23 *Napište pravidlo pro skládání Galileiho transformací (grupový součin $(S, \vec{V}, \vec{x}_0)$ a $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$), t.j. $(S'', \vec{V}'', \vec{x}''_0)$ jako funkce $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0)$ a $(S, \vec{V}, \vec{x}_0)$.*

Cvičení 24 *Vypočtěte celkový moment hybnosti soustavy N hmotných bodů $\vec{L}'$ v soustavě S' (vzhledem k počátku o') definované transformací souřadnic $S \longrightarrow S'$: $r'_j = r_j - r_j(o')$, (tj. $\mathbb{S} = \mathbb{1}$), kde soustava S je inerciální a soustava S' je:*

a) neinerciální

b) inerciální tj. $\vec{r}(o') = \vec{W}t + \vec{a}_0$*, kde* $\vec{W}$, $\vec{a}_0$ *jsou konstanty. Ukažte, že v tomto případě pro izolovanou soustavu platí* $\vec{L}' = konst.$

c) soustava hmotného středu tj. $\vec{x}(o') = \vec{R}$*. Ukažte, že druhá věta impulsová má v soustavě hmotného středu stejný tvar jako v soustavě inerciální* $\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)}$.

Cvičení 25 *Nechť*

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaké odpovídá transformaci? Spočítejte $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Cvičení 26 *Ukažte, že pro libovolné* $\vec{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) \in \mathbf{R}^3$

$$(S^T\dot{S})_{ij}\tilde{y}_j = -\tilde{\omega}_{ij}\tilde{y}_j = (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{y}})_i, \quad (\tilde{\omega}^2)_{ik}\tilde{y}_k = (\vec{\tilde{\Omega}} \times (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{y}}))_i.$$

Cvičení 27 *Ukažte, že* $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i = \tilde{\omega}_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_j$ *a pro složky vektoru* $\mathbf{Y}(t) = Y_i(t)\mathbf{e}_i = \tilde{Y}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t)$ *platí* $\frac{d}{dt}\vec{\tilde{Y}} = S^T \cdot \frac{d}{dt}(\vec{Y}) - \vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{Y}}$.

Cvičení 28 *Ukažte, že* $\omega_{ij} = -(\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)_{ij}$ *a* $\tilde{\omega}_{ij} = -(\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}})_{ij}$ *jsou složky jednoho a téhož tensoru v různých bazích a* $\vec{\Omega}$ *a* $\vec{\tilde{\Omega}}$ *jsou složky jednoho a téhož vektoru v různých bazích, t.j.*

$$\Omega_j(t)\mathbf{e}_j = \tilde{\Omega}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t) = \mathbf{\Omega}(t).$$

Návod: Použijte vzorec pro transformaci bazí a definice $\vec{\Omega}(t)$ *a* $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Cvičení 29 *Věta o viriálu pro magnetické pole: Odvoďte vztah mezi střední časovou hodnotou kinetické a potenciální energie pro soustavu nabitých částic v homogenním magnetickém poli o indukci* $\vec{B}$*. Předpokládejte, že pohyb částic probíhá v omezené oblasti prostoru omezenými rychlostmi, částice mají stejnou hmotnost* m*, stejný náboj* q *a potenciální energie* U *je homogenní funkcí stupně* k *v souřadnicích.*

Cvičení 30 *Co říká věta o viriálu pro lineární harmonický potenciál a pro Coulombické pole?*

Cvičení 31 ** Ukažte, že pokud* $\vec{X}, \vec{\tilde{X}}$ *a* $\vec{Y}, \vec{\tilde{Y}}$ *jsou složky vektorů* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *v ortonormálních bazích* $\mathbf{e}$ *a* $\tilde{\mathbf{e}}$*, pak trojice čísel* $Z_i = \varepsilon_{ijk}X_jY_k$, $\tilde{Z}_i = \pm\varepsilon_{ijk}\tilde{X}_j\tilde{Y}_k$, $i = 1, 2, 3$ *jsou složky jednoho a téhož (pseudo)vektoru* $\mathbf{Z}$ *v bazích* $\mathbf{e}$ *a* $\tilde{\mathbf{e}}$*. Čím je dáno znaménko u* $\tilde{Z}_i$ *?*

Jinak řečeno, výpočet složek vektorového součinu vektorů je až na znaménko ve všech ortonormálních *bazích stejný.*

Cvičení 32 *Ukažte, že pro těleso s konstantní hustotou hmoty v homogenním silovém poli je moment sil vzhledem k hmotnému středu tělesa nulový.*

Cvičení 33 *Homogenní válec s hlavními složkami momentu setrvačnosti* $I_1 = I_2$, I_3 *na který nepůsobí žádné síly rotuje v čase* t_0 *úhlovou rychlostí 10 rad/s okolo 2. osy. Okolo jaké osy a jakou rychlostí bude rotovat o 10 vteřin později?*

Cvičení 34 *Stabilita rotace bezsilového setrvačníku: Říkáme, že rotace je stabilní, když při malé změně* $\vec{\Omega}$ *od volné osy zůstává tato výchylka trvale malá. Ukažte, že stabilní je rotace kolem os s maximálním a minimálním hlavním momentem setrvačnosti, kdežto rotace kolem osy se středním momentem setrvačnosti je nestabilní, malá výchylka roste a rotace se "překlopí".*

Cvičení 35 *Nalezněte matici otáčení $S(t)$ pro homogenní kouli v bezsilovém prostředí.*

Cvičení 36 ** Určete pohyb bodu povrchu homogenní koule v homogenním silovém poli.*

Cvičení 37 *Jednostranná neudržující vazba: Hmotný bod je položen na svislou kružnici v těsné blízkosti nejvyššího bodu kružnice odkud začne s nulouvou počáteční rychlostí klouzat (bez tření) vlivem tíže. Kdy tento bod opustí kružnici?*
Návod: Napsat Lagrangeovy rovnice 1. druhu, dvakrát derivovat vazbu, vyjádřit Lagrangeův multiplikátor, dosadit za rychlost ze ZZE a zjistit kdy je multiplikátor nula.

Cvičení 38 *Spočítejte Jacobiány*

$$det\,\frac{\partial \hat{x}_j}{\partial q_k} \tag{4}$$

pro přechod ke sférickým souřadnicím a cylindrickým souřadnicím v $\mathbf{R}^3$*, takže* $\hat{x}_j = \hat{x}_j(r, \vartheta, \varphi)$ *respektive* $\hat{x}_j = \hat{x}_j(\rho, \varphi, z)$*. O čem vypovídá (ne)nulovost Jacobiánu?*

Cvičení 39 *Spočítejte vyjádření kartézských složek rychlosti* v_i *a kinetickou energii* $\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$ *ve sférických a cylindrických souřadnicích.*

Cvičení 40 *Napište Lagrangeovu funkci volného (žádné vazby) bezsilového (žádné síly) hmotného bodu v souřadnicích (a) kartézských (b) sférických (c) cylindrických.*

Cvičení 41 *Napište Lagrangeovu funkci volného hmotného bodu, na který působí homogenní gravitační pole a elastická centrální izotropní síla.*

Cvičení 42 *Odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla s pružným závěsem tuhosti* k *a s rovnovážnou délkou* l *(délka nezatížené pružiny). Zkoumejte limitu* $k/m \longrightarrow +\infty$ *jako přechod k ideální holonomní vazbě.*

Cvičení 43 *Ukažte, že Lorentzovu sílu*

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = e\left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)\right) \tag{5}$$

lze získat ze zobecněného potenciálu

$$U(\vec{x}, \vec{v}, t) = e\left(\varphi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)\right), \tag{6}$$

kde φ *a* $\vec{A}$ *jsou potenciály elektromagnetického pole, pro které platí*

$$\vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = rot\,\vec{A}. \tag{7}$$

Cvičení 44 *Určete jak se liší Lagrangeovy funkce pro nabitý hmotný bod v elektromagnetickém poli pro elektromagnetické potenciály lišící se o kalibrační transformaci a ukažte, že tento rozdíl nemá vliv na Lagrangeovy rovnice 2. druhu*

Cvičení 45 *Najděte obecné souřadnice pro hmotný bod vázaný na elipsu, která rotuje kolem své vedlejší poloosy s konstantní rychlostí* ω*. Tj. hmotný bod je podroben vazbám* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ *a* $x\sin(\omega t) - ycos(\omega t) = 0$

Cvičení 46 *Odvoďte pohybovou rovnici pro matematické kyvadlo, jehož délka závěsu roste lineárně s časem podle vztahu* $l(t) = l_0(1 + kt)$*, kde* l_0, k *jsou kladné konstanty.*

Cvičení 47 *Hmotný bod m v homogennním tíhovém poli klouže bez tření po kruhovém kuželi svisle stojícím na špici. Odvoďte pohybové rovnice v cylindrických souřadnicích a příslušné zákony zachování. Diskutujte případ obecné holonomní vazby na rotační plochu $R = R(z)$.*

Cvičení 48 *Ve vodorovné rovině může klouzat bez tření těleso hmotnosti m_1. To je spojeno nehmotnou tyčí délky l s tělesem hmotnosti m_2, které koná působením tíže kmitavý pohyb ve svislé rovině. Dokažte, že těleso m_2 se pohybuje po elipse a vypočítejte dobu kmitu T tohoto eliptického kyvadla pro malé amplitudy.*

Cvičení 49 *Najděte výraz pro obecnou hybnost a obecnou energii nabité částice v elektromagnetickém poli z Lagrangeovy funkce $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q[\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)]$*

Cvičení 50 *Dva body spojené nehmotnou tyčkou měnící se délky: Holonomní rheonomní vazba $f = f(\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, t) = (\vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)})^2 - l(t)^2$. Zobecněné souřadnice q_k jsou například $(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi)$ a $\hat{\vec{x}}_{(1)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi) := \vec{y} + \vec{r}$, $\hat{\vec{x}}_{(2)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi) := \vec{y} - \vec{r}$, kde*

$$\vec{y} := (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{r} = \vec{r}(t) := \frac{1}{2}l(t)\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right).$$

Spočítejte rychlosti $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí. Ověřte pravidlo o krácení teček. Určete vazbové síly.

Cvičení 51 ** Ukažte, že pro rheonomní holonomní vazby $f_K(\vec{X}, t) = 0, \quad K = 1, \ldots, p$ platí*

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_K}{\partial t} = 0.$$

Cvičení 52 *Ukažte že tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu je invariantní vůči záměně zobecněných souřadnic, t.j. pokud platí*

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\hat{L}(q, \dot{q}, t)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\hat{L}(q, \dot{q}, t) = Q_j^{(o)}(q, \dot{q}, t) := \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(o)}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}, \tag{8}$$

a $q_j = \hat{q}_j(q'_1, \ldots, q'_s, t)$ pak platí (8), kde $q \mapsto q'$, $\dot{q} \mapsto \dot{q}'$,

Cvičení 53 *Ukažte, že se tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu nezmění pokud se Lagrangeova funkce změní o totální derivaci funkce souřadnic a času, t.j. pokud*

$$\hat{L}'(q, \dot{q}, t) = \hat{L}(q, \dot{q}, t) + G(q, \dot{q}, t), \tag{9}$$

kde $G(q, \dot{q}, t) = \frac{\hat{d}}{dt}g(q, t)$.

Cvičení 54 *Jak se změní zobecněná hybnost a zobecněná energie při změně Lagrangeovy funkce o $\frac{\hat{d}}{dt}g(q, t)$?*

Cvičení 55 *Přepište Lagrangeovu funkci*

$$L = L(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + mgx_3 \tag{10}$$

do cylindrických souřadnic a nalezněte cyklickou souřadnici a zachovávající se veličinu. Ukažte, že to je třetí složka momentu hybnosti zapsaná v cylindrických souřadnicích

Cvičení 56 *Ukažte, že pokud Lagrangeova funkce nezávisí na čase (izolovaná soustava), zobecněná energie*

$$E = E(q, \dot{q}) := \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}). \tag{11}$$

je integrálem pohybu.

Cvičení 57 *Dokažte, že funkce* $F_1(x, \dot{x}, t) = \dot{x} + gt$ *a* $F_2(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 + 2gx$ *jsou první integrály rovnice* $\ddot{x} + g = 0$*, kde* $g = konst.$ *Vypočítejte pomocí nich trajektorii* $x = x(t)$.

Cvičení 58 *Dokažte, že funkce* $F_1(x, \dot{x}, t) = -\omega t + \mathrm{arctg}(\frac{\omega x}{\dot{x}})$ *a* $F_2(x, \dot{x}, t) = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2$*, jsou integrály pohybu pro systém s pohybovou rovnicí* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$*, kde* $\omega > 0$ *je konstanta. Vypočtěte pomocí nich trajektorii* $x = x(t)$.

Cvičení 59 *Nechť Lagrangeova funkce má tvar*

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U\left((x_1^2 + x_2^2), x_3\right).$$

Ukažte, že vektorové pole $\vec{Y}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)$ *splňuje*

$$\sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial x_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \right] = 0, \tag{12}$$

Napište odpovídající zachovávající se veličinu.

Cvičení 60 *Nechť Lagrangeova funkce má tvar (volný hmotný bod na přímce)*

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Ukažte, že pohybové rovnice jsou invariantní vůči "škálování" $x \mapsto x\, e^{\alpha}$*,* $\alpha \in \mathbf{R}$*, Jak vypadá vektorové pole* Y *pro tuto grupu transformací? Je* $F(x, \dot{x}, t)$ *dané vztahem*

$$F(x, \dot{x}, t) = \sum_{j=1}^{s} Y_j(x, t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x, \dot{x}, t) \tag{13}$$

integrálem pohybu?

Cvičení 61 *Najděte integrály pohybu pro nabitou částici s nábojem* e *a hmotností* m *v homogenním magnetickém poli o indukci* $\vec{B} = (0, 0, B)$ *s vektorovým potenciálem*

(a) $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$

(b) $\vec{A} = (0, Bx, 0)$.

Nalezené výsledky porovnejte a případný rozpor vysvětlete.

Cvičení 62 *Které složky celkové hybnosti* $\vec{P}$ *a celkového momentu hybnosti* $\vec{L}$ *soustavy částic se zachovávají v silovém poli* $U = U(x, y, z)$ *jehož ekvipotenciální plochy jsou*

a) roviny kolmé k ose z

b) válcové plochy s osou z

c) *kulové plochy se středem v počátku*

d) $U = U_1 + U_2$, *kde* U_1, U_2 *mají vlastnost c), ale s různými středy symetrie ležícími na ose* z.

Cvičení 63 *Ukažte, že při pohybu částice v poli* $U = \frac{\alpha}{r}$, *kde* $\alpha \neq 0$, *existuje vektorový integrál pohybu* $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$, *nazývaný Runge–Lenzův vektor, který je specifický právě pro toto pole.*

Cvičení 64 *Užitím integrálů pohybu nalezněte tvar trajektorie částice v poli* $U = \frac{\alpha}{r}$.

Cvičení 65 *Určete kmity soustavy dvou lineárních harmonických oscilátorů spojených slabou* ($0 < \alpha << \omega_0^2$) *bilineární vazbou popsané Lagrangeovou funkcí* $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$.

Cvičení 66 *Určete normální kmity dvojitého rovinného matematického kyvadla s délkami závěsů* l_1, l_2 *a hmotnostmi závaží* m_1, m_2.

Cvičení 67 *Po vodorovné rovině se může pohybovat bez tření homogenní válec poloměru* R *a hmotnosti* M. *Homogenní tyč hmotnosti* m *a délky* l *se opírá o válec tak, že svislá rovina proložená tyčí je kolmá k ose válce. Soustava je umístěna v homogenním tíhovém poli intenzity* $\vec{g}$. *Určete obecné souřadnice pro tuto soustavu, Lagrangeovu funkci, pohybové rovnice a integrály pohybu, za předpokladu, že tyč je tečnou k válci a nedochází mezi nima k tření.*

Cvičení 68 *Kruhový kotouč poloměru* a *a hmotnosti* M *se může valit bez klouzání po vodorovné rovině. Těžiště kotouče* T *leží ve vzdálenosti* e *od jeho středu. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose kolmé na jeho rovinu a procházející těžištěm je* I_T. *Vychýlíme–li kotouč z rovnovážné polohy, vykonává kolem ní vlivem tíže periodický pohyb. Určete dobu kmitu tohoto pohybu př malých výchylkách.*

Cvičení 69 *Odvoďte podmínky pro reálná a virtuální posunutí pro hmotný bod pohybující se po trojosém elipsoidu, jehož osy jsou závislé na čase*

Cvičení 70 *Najděte obecné souřadnice a Lagrangeovy funkce pro soustavy na obrázku. Soustavy jsou tvořeny ze dvou homogenních tuhých tyčí délky* l, *které jsou navzájem spojeny kloubem. Konec první tyče je vázán na počátek a konec druhé tyče je vázán na osu* x *a spojen ideální pružinou s nehybným bodem na ose* x *ležícím ve vzdálenosti* d *od počátku.*