Slabikář analytické mechaniky

Ladislav Hlavatý

2. září 2019

Uvítám každé upozornění na překlepy, nejasnosti a chyby.

Kapitoly označené * jsou doplňkové a mohou být rámcově zkoušeny jako test uchazečů aspirující na hodnocení výborně.

Zimní semestr TEF : Analytická mechanika

Obsah

Literatura

[1] I. Štoll and J. Tolar. *Teoretická fyzika. Skripta.* ČVUT, Praha, 1984.

[2] M. Brdička, A.Hladík. *Teoretická mechanika.* Academia, Praha, 1987

[3] J. Langer, J. Podolský. *Teoretická mechanika.*
http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/TEXTY/lagrange.pdf

[4] S. Golwala. *Lecture Notes on Classical Mechanics for Physics*
http://www.astro.caltech.edu/ golwala/ph106ab/

[5] H.Goldstein, Ch.Poole, J.Safko. *Classical Mechanics*
Addison wesley, San Francisco, 2002.

[6] Hand L.N., Finch J.D. *Analytical mechanics*
Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[7] V. Votruba. *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha, 1969.

[8] I. Štoll. *Elektřina a magnetismus. Skripta.* ČVUT, Praha, 1994.

1 Pohybové rovnice

Mechanika je nauka o pohybu těles aproximovaných často tzv. hmotnými body. Předpokládáme li pro začátek, že velikost a směr síly působící na hmotný bod je dána pouze jeho okamžitou polohou[1] a síla v daném místě se může s časem měnit, pak pohyb (časový vývoj poloh) jednoho hmotného bodu v prostoru je určen 2. Newtonovým zákonem[2]

$$m\,\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(b(t), t), \tag{1}$$

kde na levé straně se vyskytuje vektor okamžitého zrychlení hmotného bodu a na pravé straně vektor síly v čase t a v bodě b jeho okamžitého výskytu. Analytický zápis tohoto přírodního zákona v řeči matematiky představuje soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro funkce $x^j(t)$

$$m\,\ddot{x}^j(t) = F^j(\vec{x}(t), t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

kde $F^j(\vec{x}, t)$ jsou předem zadané (t.j. na konkrétním řešení nezávislé) funkce. Řešením soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu (2) dostáváme popis možných drah hmotného bodu, který se pohybuje pod vlivem silového pole $\mathbf{F}$. Důvod, proč si příroda vybrala právě diferenciální rovnice druhého řádu a ne třeba třetího, může být předmětem více či méně filosofických úvah (viz kapitolu 6), nicméně je třeba to přijmout jako mnohokrát experimentálně ověřený[3] fakt.

Cvičení 1 *Řešte jednoduché diferenciální rovnice*

$$\begin{aligned} y' &= f(x), \\ y' &= f(y), \\ y'' &= f(x), \\ y'' &= f(y'), \\ y'' &= f(y), \end{aligned}$$

kde $y = y(x)$ a f je libovolná spojitá funkce.

Cvičení 2 *Zopakujte si větu o derivovování složené funkce více proměnných (chain rule). Vysvětlete podrobně schematický vzorec*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

[1] Až do kapitoly 5 budeme předpokládat, že síla nezávisí na okamžité rychlosti hmotného bodu.

[2] Vektory, t.j. prvky vektorového prostoru budeme v tomto textu označovat tučným písmeny $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \ldots$ zatímco písmena se šipkou $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \ldots$ představují n–tice reálných čísel nebo funkcí, t.j. složek vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \ldots$ v nějaké bazi.

[3] Pro pohyby, jejichž rychlost je mnohem menší než je rychlost světla.

1.1 Řešitelné pohybové rovnice

Často není jednoduché pohybové rovnice sestavit, ale mnohem těžší je je řešit. Složitost řešení diferenciálních rovnic (2) silně závisí na tvaru funkcí $F^j(\vec{x}, t)$. Analytická mechanika je především nauka o metodách jak tyto rovnice řešit.

Cvičení 3 *Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro harmonický oscilátor, kde* $\vec{F}(\vec{x}) = -k\,\vec{x}$ *Proč je tato soustava diferenciálních rovnic řešitelná, v čem je speciální?*

Otázka: Čím je určena určena konkrétní dráha hmotného bodu? Proč?

V podstatě existuje velmi málo dalších analyticky řešitelných případů. Připomeneme nejjednodušší z nich.

1.1.1 Hmotný bod na přímce

Pohybuje li se bod na přímce pod vlivem vtištěné síly, která nezávisí na čase, pak příslušnou pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{3}$$

je možné v principu řešit *pro libovolnou spojitou* funkci F.

Nechť $\tilde{x}(t)$ je řešením rovnice (3). Vynásobením $\dot{\tilde{x}}$ a integrací dostaneme

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{\tilde{x}}(t)^2) = -\frac{d}{dt}U(\tilde{x}(t)),$$

kde $F(x) = -U'(x)$. Tím jsme převedli rovnici (3) na rovnici 1. řádu se separovatelnými proměnnými

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(C - U(x))}. \tag{4}$$

Její řešení lze zapsat formou integrálu

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(C - U(x))}} =: T_C(x). \tag{5}$$

Inverzí tohoto vztahu dostaneme řešení rovnice (3) $x = X_C(t - t_0)$. Pozorný čtenář si jistě všiml, že integrační konstanta C je hodnota zachovávající se energie. Je dobré poznamenat, že ač v principu jsme rovnici (3) vyřešili, primitivní funkci (5) nebo její inverzi nemusíme být schopni vyjádřit v termínech "známých" funkcí.

Pro hmotný bod v rovině nebo prostoru, *tento postup nelze obecně použít*, ba ani pro hmotný bod na přímce, pokud síla závisí na čase $F = F(x, t)$. Na druhé straně rovnice tvaru (3) nemusí popisovat pouze zmíněný případ jednoho bodu na přímce, ale může se vyskytnout i jako dílčí problém při řešení mnohem složitějších úloh, jako je matematické kyvadlo (viz Kap. 5), či systémy s několika integrály pohybu, např. hmotný bod v poli sféricky symetrického potenciálu.

1.1.2 Hmotný bod v poli sféricky symetrického potenciálu

Úlohy mechaniky ve více rozměrech jsou přesně řešitelné jen pro speciální (a řídké) případy silových polí. Vedle lineárního harmonického oscilátoru je nejznámější centrální a isotropní síla

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}\, f(r) = -grad\, U(r), \quad r = \sqrt{(\vec{x})^2}. \tag{6}$$

Rovnice pohybu v tomto případě představují soustavu tří diferencálních rovnic druhého řádu pro tři funkce $\tilde{x}_i(t)$. Zároveň ale pro tuto soustavu existují čtyři integrály pohybu : 3 složky momentu hybnosti a celková energie.

Ze zachování momentu hybnosti plyne, že pohyb se děje v rovině na něj kolmé. Soustavu souřadnou pak můžeme díky sférické symetrii problému zvolit tak, že $\vec{L} = (0, 0, l)$, z čehož plyne $\tilde{x}_3(t) = C$. V rovině xy pak zavedeme polární souřadnice

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi,$$

ve kterých má zachovávající se moment hybnosti tvar $\vec{L} = (0, 0, mr^2\dot{\varphi})$, takže

$$m\tilde{r}(t)^2\dot{\tilde{\varphi}}(t) = l = const. \tag{7}$$

Zachovávající se energie v polárních souřadnicích má díky(7) tvar

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E_0. \tag{8}$$

Vidíme tedy, že znalost čtyř integrálů pohybu nám umožnila redukovat systém tří diferencálních rovnic druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu (7) a (8) pro $\tilde{r}(t)$ a $\tilde{\varphi}(t)$. Stejným postupem jako v podkapitole 1.1.1 dostáváme z rovnice (8)

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff}((r))}} =: T_E(r). \tag{9}$$

a inverzí tohoto vztahu dostaneme časovou závislost radiálního pohybu $\tilde{r}(t)$, t.j. okamžitou vzdálenost bodu od centra silového pole. Dosazením $r = \tilde{r}(t)$ do (7) pak můžeme dostat i časovou závislost úhlového pohybu $\tilde{\varphi}(t)$. Pro $U(r) = \frac{const}{r}$ se tato úloha nazývá Keplerova.

2 Prostor a čas, souřadnice, vektory, tenzory, transformace

Rozeberme si podrobněji veličiny vyskytující se v matematickám zápisu (2) druhého Newtonova zákona pro hmotný bod. Obecně se říká, že x^j jsou **kartézské souřadnice** hmotného bodu a $\ddot{x}^j$ a $F^j(\vec{x})$ jsou **kartézské složky vektoru** zrychlení **a** a **vektorového pole** sil **F**. Co se těmito pojmy míní?

Mechanika je teorie pohybu ve "fyzikálním" prostoru, který stejně jako čas potřebujeme popsat matematickými pojmy. Čas je v klasické nerelativistické mechanice univerzální parametr $t \in \mathbf{R}$ nezávislý na pohybu "vztažné soustavy"(viz dále). Fyzikální prostor lze chápat jako soubor míst, kde se mohou nacházet hmotné body. Nerelativistická představa prostoru okolo nás je, že v něm platí eukleidovská metrika, t.j. vzdálenosti bodů popsaných kartézskými souřadnicemi jsou dány Pythagorovou větou. "Prázdný" prostor ale nemá žádný význačný bod, není to tedy vektorový prostor. V klasické nerelativistické mechanice jej považujeme za afinní prostor se skalárním součinem. Co to je?

Definice 2.0.1 **Afinním prostorem** *nazýváme uspořádanou trojici* $\mathcal{E} := (E, d, \mathbf{E})$, *kde*

- E *je množina.*
- $\mathbf{E}$ *je vektorový prostor.*
- d *je zobrazení* $d : E \times E \to \mathbf{E}$, *takové že*
    1. $\forall a, b, c \in E : \; d(a, b) + d(b, c) + d(c, a) = \theta$. *(Součet vektorů tvořící trojúhelník* a, b, c *je nulový vektor.)*
    2. $\forall a \in E$ *je zobrazení* $d_a : E \to \mathbf{E}$, $d_a(b) := d(a, b)$ *bijekce. (Zvolím-li "počátek"* a*, pak každý bod v* E *lze dostat přičtením vhodného vektoru.)*

Rozměrem afinního prostoru $\mathcal{E}$ *nazýváme rozměr přidruženého vektorového prostoru* $\mathbf{E}$*.*

Často se značí $d(a, b) \equiv b - a \equiv \mathbf{r}_{ab} \in \mathbf{E}$, $b = d_a^{-1}(\mathbf{r}) \equiv a + \mathbf{r} \in E$. Body afinního prostoru můžeme tedy (na rozdíl od vektorového prostoru) pouze "odečítat", případně k bodu přičíst vektor.

Body fyzikálního prostoru tedy chápeme jako prvky afinního prostoru, tedy množiny E, kde přidružený vektorový prostor $\mathbf{E}$ je konečně rozměrný a reálný $\mathbf{E} = \mathbf{V}_n$. Pro jeden bod v prostoru $n = 3$, v rovině $n = 2$, na přímce $n = 1$. Pro N bodů v prostoru $n = 3N$, v rovině $n = 2N$, ...

Definice 2.0.2 *Nechť* $\mathbf{E}$ *je reálný vektorový prostor.* **Skalárním součinem** *nazveme zobrazení* $(.,.) : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$*, které je bilineární, symetrické a striktně positivní.*

Pro popis pohybu hmotných bodů a formulaci pohybových zákonů je nutné zavést *souřadnice bodů* v afinním prostoru E a *složky vektorů* ve vektorovém prostoru $\mathbf{E}$. K tomu je třeba napřed vybrat tzv. **vztažnou soustavu** (o, e) (referenční systém), kde $o \in E$ a e je baze v $\mathbf{E}$, $e = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{e}_j \in \mathbf{E}$. Abychom mohli určit souřadnice bodu b ve "fyzikálním" prostoru je třeba tedy zvolit

1. bod ve fyzikálním prostoru, který hraje roli počátku o souřadnic v afinním prostoru E

2. směry, které hrají roli baze $e = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ v přidruženém vektorovém prostoru $\mathbf{E}$.

Tento výběr není a priori nijak dán a navíc se v průběhu času může měnit!

("Přímočaré") **Souřadnice bodu** $b \in E$ **vzhledem k počátku** $o \in E$ **a bazi** e v $\mathbf{E}$ jsou pak funkce

$$\psi_{o,e} : E \to \mathbf{R}^n,\ b \mapsto \psi_{o,e}(b) \equiv (x^1(b), x^2(b), ..., x^n(b)) := (\phi_e^1(b - o), ..., \phi_e^n(b - o)), \tag{10}$$

kde ϕ_e^j jsou funkcionály na $\mathbf{V}_n$ duální k bazi e, t.j. $\phi_e^j(\mathbf{e}_k) = \delta_k^j$ neboli

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_j V^j \ \Leftrightarrow\ V^j = \phi_e^j(\mathbf{V}).$$

Z linearity ϕ a vlastností d plyne

$$x^j(o) \equiv \psi_{o,e}^j(o) = 0,\ \ x^j(b_1) - x^j(b_2) \equiv \psi_{o,e}^j(b_1) - \psi_{o,e}^j(b_2) = \phi_e^j(b_1 - b_2). \tag{11}$$

Je-li baze e **ortonormální**, t.j.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

pak se souřadnice nazývají **kartézské**.

Transformace souřadnic: Hodnoty souřadnic $x^j(b) \equiv \phi_e^j(b - o)$ pro jeden a tentýž bod b závisí na výběru vztažných soustav (o, e). Nechť $\psi_{o,e}$, $\tilde{\psi}_{\tilde{o},\tilde{e}}$ jsou dva systémy souřadnic vzhledem k počátku o a bazi $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ respektive $(\tilde{o}, (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n))$, kde[4]

$$\tilde{o} = o + \mathbf{w},\ \mathbf{w} \in \mathbf{E},\ \tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S^j{}_i \tag{12}$$

a matice S je invertibilní reálná matice $n \times n$, neboli $S \in GL(n, \mathbf{R})$.

[4]Pokud není výslovně uveden opak, používáme tzv. Einsteinovo sumační pravidlo, že přes opakující indexy se sčítá od 1 do n.

Pak pro ně platí vztah

$$x^j(b) = \psi^j_{o,e}(b) = S^j{}_i \tilde{\psi}^i_{\tilde{o},\tilde{e}}(b + \mathbf{w}) = S^j{}_i \tilde{x}^i(b + \mathbf{w}) = S^j{}_i(\tilde{x}^i(b) - \tilde{x}^i(o)),$$

zkráceně[5]

$$\vec{x}(b) = S \cdot (\vec{\tilde{x}}(b) - \vec{\tilde{x}}(o)). \tag{13}$$

Dk.: $b - o = \mathbf{e}_j \phi^j_e(b - o) = b + \mathbf{w} - \tilde{o} = \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\phi}^i_{\tilde{e}}(b + \mathbf{w} - \tilde{o}),\ \tilde{x}^i(\tilde{o}) = 0 \Rightarrow ...$

Uvědomme si, že $\vec{x} := (x^1, \ldots, x^n)$, $\vec{\tilde{x}} := (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ jsou dvě n-tice **funkcí** $E \to \mathbf{R}$, pro které platí (13).

Cvičení 4 *Ukažte, že* $\vec{x}(\tilde{o}) = -S \cdot \vec{\tilde{x}}(o)$, *takže platí též*

$$\vec{x}(b) = S \cdot \vec{\tilde{x}}(b) + \vec{x}(\tilde{o}) \tag{14}$$

a odvoďte inverzní vztah k (13), t.j. $\tilde{x}^i(b)$ *jako funkci* $x^i(b)$ *a* $x^i(\tilde{o})$.

Z definice (12) plyne

$$x^i(\tilde{o}) = \phi^i_e(\mathbf{w}) = w^i,\ \tilde{x}^i(o) = \tilde{\phi}^i_e(\mathbf{w}) = \tilde{w}^i,$$

takže transformace souřadnic (13) jsou určeny vektorem $\mathbf{w} \in \mathbf{E}$ a maticí $S \in GL(n, \mathbf{R})$ a nazývají se rovněž afinní. Poznamenejme, že jak matice S, tak vektor $\mathbf{w}$, t.j. vztah mezi souřadnými soustavami, se *může měnit s časem*, což se nám bude hodit v dalších úvahách, např. při přechodech mezi inerciální a neinerciální soustavou či při popisu pohybu tuhého tělesa.

Čas je v nerelativistické mechanice universální parametr, který se (na rozdíl od relativistické mechaniky) při transformaci souřadnic nemění.

2.1 Vektory a tenzory

Je-li zvolen počátek o, pak můžeme bod fyzikálního prostoru b reprezentovat též jako vektor $\mathbf{b}$ přidruženého vektorového prostoru $\mathbf{E}$ a pokud $\tilde{o} = o$, pak se souřadnice bodů transformují jako složky vektoru[6]. "Rozdíl bodů" $(b - a) = d(b, a)$ je v každém případě vektor, takže rychlost pohybujícího se bodu

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{b(t) - b(t_0)}{t - t_0}$$

je rovněž vektor stejně jako zrychlení nebo síla v daném bodě.

[5]Šipkou $\vec{}$ nad symbolem y pro jakékoliv y míníme *uspořádanou n-tici reálných čísel* $\vec{y} := (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, zatímco vektory $\mathbf{v}$ ležící v obecném n-rozměrném vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$, tedy např $\mathbf{E}$ značíme tučně. Tečka uprostřed $\cdot$ znamená maticové násobení nebo skalární součin.

[6]Obecně nikoliv, porovnej (13) a (15).

Pro konkrétní výpočty většinou používáme složky vektorů v nějaké bazi a proto fyzikové často pod pojmem vektor myslí n-tici jeho složek $(V^1, V^2, ..., V^n)^T =: \vec{V} \in \mathbf{R}^n$. Je ale třeba si uvědomit, že tento zápis vektoru je vázán na danou bazi a pokud *fyzikální interpretace výsledků má být nezávislá na výběru baze* potřebujeme znát pravidla pro transformaci složek vektoru $\mathbf{V} \in \mathbf{E}$ při přechodu od jedné baze ke druhé.

Nechť

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_i V^i = \tilde{\mathbf{e}}_j \tilde{V}^j,$$

kde přechod od (ne nutně ortonormální) baze $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ k bazi $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$ je dán maticí $S \in GL(n)$ způsobem $\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i S^i{}_j$. *Složky* jednoho a téhož *vektoru* tedy mohou být *různé v závislosti na zvolené bazi.* Ze způsobu transformace prvků bazí je snadné ukázat, že složky libovolného vektoru $\mathbf{V}$ se transformují podle pravidla (srovnej s (13))

$$\tilde{V}^j = (S^{-1})^j{}_i V^i \ \Leftrightarrow\ \vec{\tilde{V}} = S^{-1} \cdot \vec{V}. \tag{15}$$

Přesněji řečeno, tímto způsobem se transformují složky tzv. *kontravariantních* vektorů, což je například rychlost nebo zrychlení. Mimo to existují ještě tzv. *kovariantní* vektory[7], (například hybnost) jejichž složky se transformují stejně jako prvky baze, t.j.[8]

$$\tilde{W}_i = W_j S^j{}_i \ \Leftrightarrow\ \vec{\tilde{W}}^T = \vec{W}^T \cdot S = (S^T \cdot \vec{W})^T. \tag{16}$$

Příklad 2.1 *Nechť $n = 3$ a*

$$S = \begin{pmatrix} 2,54 & 0 & 0 \\ 0 & 2,54 & 0 \\ 0 & 0 & 2,54 \end{pmatrix}$$

(změna měřítka, délky měříme v palcích místo v centimetrech). Složky kovariantního vektoru se zvětší 2,54 krát, zatímco složky kontravariantního vektoru se 2,54 krát zmenší.

Cvičení 5 *Nechť složky veličiny* $\mathbf{A}$ *v bazi* $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mají hodnoty* $(1, 2, 3)$ *a složky veličiny* $\mathbf{B}$ *v téže bazi mají hodnoty* $(4, 5, 6)$.

V bazi $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$ *má tatáž veličina* $\mathbf{A}$ *složky* $(2, 0, -1)$ *a veličina* $\mathbf{B}$ *složky* $(15, 5, -2)$.

Je veličina $\mathbf{A}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor? Je veličina* $\mathbf{B}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

[7] Prvky duálního prostoru $\mathbf{V}_n^*$

[8] Je zvykem psát indexy složek kontravariantních veličin nahoru, zatímco indexy složek kovariantních veličin dolů

Pozn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6 *Nechť složky veličiny* $\mathbf{C}$ *v bazi* $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mají hodnoty* $(1,1,1)$ *a v bazi* $\tilde{\mathbf{e}}$ *z předchozího cvičení mají rovněž hodnoty* $(1,1,1)$*. Je veličina* $\mathbf{C}$ *kovariantní nebo kontravariantní vektor?*

Podobným způsobem lze definovat složky **tenzoru** v dané bazi. Složky kontravariantního tenzoru 2. řádu $\mathbf{T}$ tvoří $n \times n$–tici reálných čísel T^{ij}, které se při transformaci bazí $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S^j{}_i$ transformují způsobem

$$\tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i{}_k (S^{-1})^j{}_l T^{kl}. \tag{17}$$

Pro kovariantní (t.j. transformující se podobně jako prvky baze) tenzory je třeba nahradit $S^{-1} \to S^T$, takže složky kovariantního tenzoru 2. řádu se transformují způsobem

$$\tilde{T}_{ij} = T_{kl} S^k{}_i S^l{}_j. \tag{18}$$

Složky kovariantních tenzorů řádu q se transformují analogicky způsobem

$$\tilde{T}_{i_1 i_2 \dots i_q} = T_{k_1 k_2 \dots k_q} S^{k_1}{}_{i_1} S^{k_2}{}_{i_2} \dots S^{k_q}{}_{i_q}. \tag{19}$$

Otázka: Jak se transformují složky kontravariantních tenzorů řádu q?

Složky smíšených tenzorů řádu (p,q) se transformují způsobem

$$\tilde{T}^{j_1 j_2 \dots j_p}{}_{i_1 i_2 \dots i_q} =$$

$$= (S^{-1})^{j_1}{}_{m_1} (S^{-1})^{j_2}{}_{m_2} \dots (S^{-1})^{j_p}{}_{m_p} T^{m_1 m_2 \dots m_p}{}_{k_1 k_2 \dots k_q} S^{k_1}{}_{i_1} S^{k_2}{}_{i_2} \dots S^{k_q}{}_{i_q}. \tag{20}$$

Cvičení 7 ** Ukažte že matice* $A^j{}_i$ *přiřazená v bazi e lineárnímu operátoru* $\mathbf{A}$ *na* $\mathbf{V}_n$ *způsobem* $\mathbf{A}\mathbf{e}_i =: \mathbf{e}_j A^j{}_i$ *se transformuje jako smíšený tensor řádu* $(1,1)$*.*

Příkladem kontravariantního tenzoru 2. řádu je moment setrvačnosti tělesa, viz Kap. 4.2. Jiným zajímavým příkladem je smíšený tenzor $\mathbf{I}$ řádu (1,1), jehož složky $I^i{}_j = \delta^i_j := \delta_{ij}$ jsou ve všech bazích stejné, neboť

$$\tilde{I}^i{}_j = (S^{-1})^i{}_k I^k{}_l S^l{}_j = (S^{-1})^i{}_k S^k{}_j = \delta_{ij}.$$

Poznamenejme ještě, že uvedenými způsoby se transformují vektory a tenzory **pouze při lineárních transformacích baze** (12). Při jiných, například Galileových transformacích (viz dále), se vektory a tenzory mohou transformovat jinak.

Cvičení 8 *Nechť* $\mathbf{e}_j$ *jsou prvky ortonormální baze a* $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j F^j{}_i$*, kde* $F \in GL(n)$ *jsou prvky obecně neortonomální baze* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$*. Ukažte, že skalární součin* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *má v bazi* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$*, a , tvar*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij}, \tag{21}$$

kde

$$g_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = F^k{}_i F^k{}_j = (F^T \cdot F)_{ij}$$

je Grammova matice souboru $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

Cvičení 9 *Ukažte, že prvky matice* g_{ij} *definující skalární součin (21) v obecné bazi lze považovat za složky kovariantního (tzv. metrického) tenzoru.*

Cvičení 10 *Ukažte, že pokud* V^j *jsou složky kontravariantního vektoru pak čísla* $W_i := g_{ij} V^j$ *lze považovat za složky kontravariantního vektoru.*

Na pravé straně 2. Newtonova zákona (1) není konstantní vektor nýbrž **vektorové pole** $\mathbf{F}(b)$[9]. Transformační vlastnosti jeho složek mají tvar

$$\tilde{F}^j(\vec{\tilde{x}}) = (S^{-1})^j{}_i F^i(\vec{x}), \;\Leftrightarrow\; \vec{\tilde{F}}(\vec{\tilde{x}}) = S^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}), \tag{22}$$

kde $\vec{x} = (x^1(b), ..., x^n(b))$ a $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}^1(b), ..., \tilde{x}^n(b))$ jsou souřadnice jednoho a téhož bodu $b \in E$, takže vztah mezi $\vec{x}(b)$ a $\vec{\tilde{x}}(b)$ je dán vzorcem (13). Analogické transformace lze napsat i pro složky tenzorových polí. Nejjednodušší příklad je tenzorové pole řádu 0 – skalární pole, které se transformuje způsobem

$$\tilde{U}(\vec{\tilde{x}}) = U(\vec{x}). \tag{23}$$

Všimněte si, že funkce U a $\tilde{U}$ pro totéž skalární pole v různých souřadných systémech jsou v obecném případě různé.[10]

Cvičení 11 *Transformace skalárního pole. Jakých hodnot nabývá elektrický potenciál soustavy dvou elektronů vzdálených od sebe na délku* l *ve vztažné soustavě:*

1. (o, e)*, kde* o *je bod ležící ve středu úsečky spojující elektrony a* e *je ortonormální soustava taková, že* $\mathbf{e}_1$ *směřuje ve směru spojnice obou elektronů a* $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *jsou na ní kolmé?*

[9] V daném čase nebo pro sílu nezávislou na čase

[10] Mají stejné hodnoty pro různé argumenty $\vec{x}$ a $\vec{\tilde{x}}$ odpovídající souřadnicím téhož bodu b v různých vztažných soustavách, ale obecně $\tilde{U}(\vec{x}) \neq U(\vec{x})$.

2. $(\tilde{o}, \tilde{e})$, *kde* $\tilde{o}$ *je bod ležící ve vrcholu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je tvořena úsečkou spojující elektrony a* $\tilde{e}$ *je ortonormální soustava taková, že* $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ *směřují ve směru jednotlivých elektronů a* $\tilde{\mathbf{e}}_3$ *je na ně kolmá?*

Ač funkce U *a* $\tilde{U}$ *mají různý tvar, popisují stejné elektrické pole!*

Cvičení 12 *Ukažte že pro libovolné skalární pole* U *se veličina* $grad\, U$ *transformuje při ortogonálních transformacích jako vektorové pole.*

Používáme-li pouze kartézské souřadnice a složky vektorů v ortonormálních bazích, pro které platí $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{e}_i} \cdot \tilde{\mathbf{e}_j} = \delta_{ij}$, pak pro transformační matice S dostaneme vztah

$$\delta_{ij} = \tilde{\mathbf{e}_i} \cdot \tilde{\mathbf{e}_j} = S^k{}_i S^l{}_j \mathbf{e_k} \cdot \mathbf{e_l} = S^k{}_i S^l{}_j \delta_{kl} = S^k{}_i S^k{}_j = (S^T.S)_{ij} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{1} = S^T \cdot S, \quad (24)$$

takže $S^{-1} = S^T$. Matice s touto vlastností nazýváme ortogonální a jejich množinu označujeme $O(n)$.

$$O(n) := \{S \in \mathbf{R}^{n,n}, S^T = S^{-1}\}.$$

Tato množina, stejně jako $GL(n)$, tvoří grupu (viz [1] dodatek D1), kde grupový součin je násobení matic.

Všimněte si že při ortogonálních transformacích, kdy $S^{-1} = S^T$, se složky vektoru transformují stejnou maticí jako prvky baze, zatímco pro obecné transformace se složky vektoru transformují maticí $S^{-1} \neq S^T$. Omezíme-li se tedy pouze na ortogonální transformace, pak nejsme schopni rozlišit mezi kovariantními a kontravariantními vektory, což samozřejmě platí i pro tensory.

Z vlastností determinantu je zřejmé, že pro $S \in O(n)$ je $det\, S = \pm 1$. Podmnožina matic s $det\, S = 1$ se označuje $SO(n)$ a je podgrupou grupy $O(n)$.

$$SO(n) := \{S \in \mathbf{R}^{n,n}, S^T = S^{-1}, det\, S = 1\}.$$

Grupa $SO(n)$ je grupou všech otočení ortonormálních bazí v $\mathbf{E}_n$.

$$S \in SO(2) \;\Rightarrow\; S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2.1.1 * Tensorové hustoty

Zobecněním tensorů jsou **tensorové hustoty**. Kovariantní *tensorová hustota* τ *váhy* λ je veličina, jejíž složky se transformují způsobem

$$\tilde{\tau}_{ijk\ldots} = (detS)^\lambda \tau_{lmp\ldots} S^l{}_i S^m{}_j S^p{}_k. \quad (25)$$

Analogicky lze definovat kontravariantní či smíšené tenzorové hustoty. Jak vidno z definice tenzorové hustoty, transformacemi pouze z $SO(N)$ nelze rozlišit mezi tensorovými hustotami a tensory.

Cvičení 13 *Ukažte že* $\gamma = \det g_{ij}$*, kde* g_{ij} *je matice definující skalární součin v obecné bazi, je skalární hustota stupně 2.*

Cvičení 14 **Ukažte že totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly v dimenzi* n

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots i_n} \in \{-1, 0, 1\}, \quad \varepsilon_{1,2,\ldots,n} = 1 \tag{26}$$

lze chápat jako složky $GL(n)$*–invariantní kovariantní tenzorové hustoty váhy -1 a zároveň invariantní kontravariantní tenzorové hustoty váhy +1. Použijte definici determinantu matice. Důsledek:* $E_{i_1,i_2,\ldots i_n} := \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots i_n}\sqrt{|det\, g|}$ *jsou složky kovariantního tensoru a* $E^{i_1,i_2,\ldots i_n} := \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots i_n}/\sqrt{|det\, g|}$ *jsou složky kontravariantního tensoru.*

Pravidla pro počítaní s Levi–Civitovými symboly lze nalézt v [1], dodatek D3.

Připomeňme na závěr, že uvedené transformační vlastnosti vektorů a tenzorů se týkají jejich chování v případě lineárních transformací. V dalším textu se setkáme i s obecnějšími transformacemi, např. chování fyzikálních veličin při Galileovských transformacích v kapitole 3.1, či jednoparametrickými grupami transformací křivočarých souřadnic ve větě Noetherové.

2.2 * Orientace prostoru, pseudovektory, pseudotenzory, vektorový součin

Ve fyzice existují veličiny charakterizované pouze přímkou., např osou otáčení, a jejich směr je určen naší volbou, např. pravidlem pravé či levé ruky, matematicky řečeno orientací vektorového prostoru. Tyto veličiny popisujeme tzv. pseudovektory (neboli axiálními vektory). Příkladem je moment hybnosti, moment síly nebo magnetická indukce. Vůči změně baze se transformují jako vektory, ale jejich směr závisí na orientaci vektorového prostoru (vybereme-li pravidlo pravé či levé ruky). Další zobecnění vektorů a tensorů, které je ve fyzice zapotřebí, jsou pseudotenzory a pseudoskaláry.

Orientaci vektorového prostoru lze zavést například následujícím způsobem: Řekneme, že dvě baze vektorového prostoru $\mathbf{E}$ jsou souhlasně orientované pokud determinant matice přechodu mezi nimi je kladný a opačně orientované pokud je záporný. Množinu všech bazí $\mathbf{E}$ tak lze rozdělit na dvě poloviny – třídy ekvivalence. Orientaci prostoru pak definujeme jako výběr jedné z těchto dvou tříd. Formálnější je

Definice 2.2.1 *Nechť* $\mathbf{E}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem.* **Orientací n-rozměrného vektorového prostoru E** *nazveme multilineární, totálně antisymetrické zobrazení*

$$\omega : \underbrace{\mathbf{E} \times \ldots \times \mathbf{E}}_{n} \to \mathbf{R}$$

takové, že existuje ortonormální baze $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$*, ve které* $\omega(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = 1$. **Smíšeným součinem vektorů** $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *nazveme* $\omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$.

Definice 2.2.2 *Baze*[11] $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ *v prostoru s orientací* ω *se nazývá* **pozitivně (negativně)**[12] **orientovaná**, *pokud* $\omega(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n) > 0$, (< 0).

Ortonormální baze $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ v definici 2.2.1 je tedy pozitivně orientovaná. Pokud $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{f}_n)$ je pozitivně orientovaná, pak díky multilinearitě a antisymetrii ω jsou $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{n-1}, -\mathbf{f}_n)$ a $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n, , \mathbf{f}_{n-1})$ negativně orientované. V prostoru $\mathbb{R}^n$ se zavádí standardní orientace obvykle tak, že baze

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

je pozitivně orientovaná.

Z výše uvedených definic plyne, že složky orientace v ortonormální pozitivně orientované bazi jsou totálně antisymetrické Levi–Civitovy symboly $\omega_{i_1,i_2,\ldots i_n} = \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots i_n}$.

Cvičení 15 *Napište* $\omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ *ve složkách vektorů* $\mathbf{v}_j$ *v ortonormální i neortonormální bazi*

Cvičení 16 *Ukažte, že* $\mid \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid$ *je obsah rovnoběžníka s hranami* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *a* $\mid \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mid$ *je objem rovnoběžnostěnu s hranami* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Veličiny označované předponou **pseudo-** se při změnách *baze* transformují stejně jako původní veličiny, ale při změně *orientace* prostoru $\omega \;\to -\omega$ mění znaménko. **Pseudovektorem** (axiálním vektorem) je například vektorový součin dvou vektorů tedy také moment hybnosti či moment síly.

Tvrzení 2.1 *Nechť na n–rozměrném vektorovém prostoru je zadán skalární součin a orientace. Pak pro každou uspořádanou* $(n-1)$*-tici vektorů* $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1})$ *existuje právě jeden pseudovektor* $\mathbf{A}_\omega \in \mathbf{E}$ *takový, že*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{E} \quad \omega(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}_\omega \cdot \mathbf{u}.$$

Pseudovektor $\mathbf{A}_\omega$ se nazývá **vektorovým součinem** vektorů $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1})$. Někdy se používá značení $\mathbf{A}_\omega = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}]_\omega$.

Cvičení 17 *Ukažte, že pokud* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou kontravariantní vektory, pak* $\mathbf{A}_\omega$ *je kontravariantní vektor.*

[11] ne nutně ortonormální

[12] Někdy se používá termín souhlasně (nesouhlasně) orientovaná

V třírozměrném vektorovém prostoru $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_\omega \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_\omega$. Všimněte si, že při změně orientace prostoru vektorový součin (tak jako každý pseudovektor) změní znaménko $\mathbf{A}_\omega = -\mathbf{A}_{-\omega}$. Podobně jou definovány i pseudotensory $\mathbf{T}_\omega$ a pseudo skaláry $\mathbf{S}_\omega$ tak, že pro ně platí

$$\mathbf{T}_\omega = -\mathbf{T}_{-\omega}, \ \mathbf{S}_\omega = -\mathbf{S}_{-\omega}, \tag{27}$$

Cvičení 18 *Ukažte že v ortonormální pozitivně orientované bazi* $\mathbf{e}_k$ *platí pro vektorový součin vzorec* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}_k$. *Změní se vzorec v negativně orientované bazi?*

Cvičení 19 **Ukažte že v libovolné bazi* $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_k F^k{}_j$ *platí pro vektorový součin vzorec* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = det F \, a^i b^j \, \varepsilon_{ijk} \, (g^{-1})^{kl} \, \mathbf{f}_l$, *kde* a^i, b^j *jsou složky vektorů v bazi* $\mathbf{f}_l$ *a matice* $g = F^T \cdot F$.

Cvičení 20 *Rozeberte transformační vlastnosti jednotlivých veličin vystupujících v Lorentzově síle působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli.*

Cvičení 21 **Spočítejte složky vektorových součinů* $[\mathbf{a}]$ *ve* V_2 *a* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *ve* V_4.

Inverse os: $\tilde{\mathbf{f}}_j = P\mathbf{f}_j := -\mathbf{f}_j, \ j = 1, ..., n$ mění (nemění) orientaci *baze* pokud $dim \ \mathbf{E}$ je lichá (sudá).
Otázka: Jak se změní složky vektoru $\mathbf{V}$, pseudovektoru $\mathbf{A}_\omega$, tensorů $\mathbf{T}$, pseudotensorů $\mathbf{T}_\omega$ a tensorových hustot při inversi os?

2.2.1 * Orientace ve fyzice (P. Novotný)

Zatímco v matematice je situace poměrně jasná, dochází ve vetšině fyzikální literatury k zmatkům ohledně orientace, transformací a pseudovektorů. Zdůrazněme, že jsme klasifikovali výše uvedené matematické objekty vzhledem k jejich chování při změně baze v $\mathbf{E}$ tedy při takzvaných **pasivních transformacích**. Pasivní transformace odpovídají ve fyzice přechodům mezi vztažnými soustavami a proto i fyzikální veličiny klasifikujeme podle jejich chování při pasivních transformacích.

Ačkoli se na první pohled může zdát, že pasivní transformace jsou jen obrácené aktivní transformace (místo pootočení soustavy souřadnic otočíme vektory opačným směrem a dostaneme "totéž"), není tomu tak. Je mezi nimi podstatný rozdíl. Aktivní transformace mění fyzikální objekty zatímco pasivní transformace mění pouze jejich popis. Při vlastních ortogonálních transformacích (rotace) není tento rozdíl příliš vidět. Uvažujme ale například aktivní transformaci $\mathbf{a}' = \mathbf{P}(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$ inverzi v třírozměrném prostoru. Tato z vektoru $\mathbf{a}$ vyrobí nový vektor $\mathbf{a}'$ který je opačný k původnímu $\mathbf{a}$. Jak se bude transformovat veličina která je definována jako vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$? Vektorový součin transformovaných vektorů bude $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{P}(\mathbf{a}) \times \mathbf{P}(\mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, což je zřejmě různé od $P(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}$. Veličina $\mathbf{c}$ se tedy při této aktivní transformaci netransformuje jako vektor nýbrž $P(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, zůstává beze změny.

Uvažujme nyní transformaci P jakožto pasivní transformaci tj. přechod od baze $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ k bazi $(-\mathbf{e_1}, -\mathbf{e_2}, -\mathbf{e_3})$. Vektory se při této "inverzi os" nemění, ale jejich složky se transformují podle $\tilde{a}^i = P(a^i) = -a^i$. Jak se nyní budou transformovat složky veličiny definované jako vektorový součin $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$? Vyjdeme z definice. Nechť například baze $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ je pozitivně orientovaná ortonormální. Pak dostaneme

$$c^i = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e_i} = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e_i}) = \omega(a^j \mathbf{e_j}, b^k \mathbf{e_k}, \mathbf{e_i}) = a^j b^k \omega(\mathbf{e_j}, \mathbf{e_k}, \mathbf{e_i}) = \varepsilon_{jki} a^j b^k.$$

Zatímco pro negativně orientovanou baze $(-\mathbf{e_1}, -\mathbf{e_2}, -\mathbf{e_3})$ máme

$$\tilde{c}^i = \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) = \omega(\tilde{a}^j \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j}, \tilde{b}^k \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) = \tilde{a}^j \tilde{b}^k \omega(\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j}, \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) = -\varepsilon_{jki} \tilde{a}^j \tilde{b}^k.$$

Tedy

$$\tilde{c}^i = -\varepsilon_{jki} \tilde{a}^j \tilde{b}^k = -\varepsilon_{jki}(-a^j)(-b^k) = -\varepsilon_{jki} a^j b^k = -c^i = P(c^i)$$

a složky vektorového součinu se transformují stejně jako složky vektoru.

Většina fyzikálních dějů které budeme popisovat se odehrává v třírozměrném eukleidovském prostoru. Zde bývá ve fyzice zvykem zavádět tzv. pravotočivé a levotočivé kartézské souřadné systémy. Pravotočivé jsou ty kde třetí bazický vektor dostaneme jako vektorový součin prvního a druhého přičemž použijeme pravidlo pravé ruky (či jakékoliv jiné). Levotočivé pak ty s opačně orientovanou bazí. Použité pravidlo pravé ruky představuje volbu orientace prostoru. Fyzikální prostor je třeba orientovat pomocí reálných fyzikálních předmětů jako například pravotočivý šroub, pravá ruka nebo vybrané *pořadí* předmětů (hvězd, rohů místnosti, ...), ke kterým směřují prvky baze.

Problém je ale v tom, že většina fyziků nerozlišuje orientaci baze od orientace prostoru. A tedy prostor automaticky orientuje tak že jejich baze má vždy pozitivní orientaci. Tj. **pravotočivá soustava** znamená pravotočivou bazi a pravotočivý prostor (pravidlo pravé ruky) a **levotočivá soustava** levotočivou bazi a levotočivý prostor (pravidlo levé ruky). Přechod mezi těmito dvěma soustavami (či spíše modely) pak není pouhá inverze os, ale inverze os spojená se změnou orientace prostoru! A je to *změna orientace prostoru* díky níž pseudovektory (úhlová rychlost, moment hybnosti nebo magnetická indukce) při přechodu od pravotočivé soustavy k levotočivé na rozdíl od vektorů mění svůj směr – jsou totiž pokaždé určeny podle jiného pravidla. Stejně tak vektorový součin, jelikož je závislý na orientaci prostoru, je v těchto pravotočivých a levotočivých soustavách (byť počítaný pomocí stejného vzorce $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$) opačný. Vzhledem k tomu, že při přechodu od pravotočivé soustavy k levotočivé změní směr jak pseudovektory tak prvky baze, souřadnice pseudovektoru se při této transformaci (na rozdíl od pouhé inverze os) nezmění.

3 Newtonova mechanika hmotných bodů

První Newtonův zákon (formulovaný již Galileem) říká, že těleso (v našem pojetí hmotný bod) se pohybuje rovnoměrně přímočaře (což zahrnuje i klidový stav), pokud na něj nepůsobí vtištěné síly. Toto tvrzení potřebuje opět vyjasnit použité pojmy.

Vtištěnými silami myslíme síly nesetrvačné, jejichž původ je v okolním prostředí, například gravitace, elektromagnetické síly, tření, atd. Rovnoměrný přímočarý pohyb je možno charakterizovat jako časový vývoj poloh hmotného bodu, jehož souřadnice jsou lineárními funkcemi času.

Pokud ale ztotožníme počátek souřadnic s pohybujícím se bodem $b(t)$ (což obecně můžeme, neboť jsme řekli, že transformace souřadnic může záviset na čase), pak z definice souřadnic (10) plyne $x^i(b(t)) = 0$. Pokaždé tedy můžeme přejít ke vztažné soustavě závislé na čase, vůči které je hmotný bod v klidu. *Pro formulaci Newtonových zákonů pohybu však nejsou všechny vztažné systémy rovnocenné.* Je třeba určit, které vztažné soustavy jsou význačné a poté určit, jak budou tyto zákony vypadat v ostatních vztažných soustavách.

3.1 Inerciální vztažné soustavy, druhý Newtonův zákon

Ukazuje se, že význačnými vztažnými soustavami jsou tak zvané soustavy inerciální, ve kterých platí první Newtonův zákon - zákon setrvačnosti (inercia). *Kartézská* soustava souřadnic $x^i(b)$ je **inerciální** pokud souřadnice $\tilde{x}^i(t) := x^i(b(t))$ pohybujícího se hmotného bodu, na který nepůsobí žádné vtištěné síly, jsou lineárními funkcemi času.

Inerciálnost vztažné soustavy tedy souvisí s pojmem (absence) vtištěné síly, neboli pojmem **bezsilového bodu**. Bezsilové hmotné body, které se podle 1. Newtonova zákona pohybují rovnoměrně přímočaře, by mohly sloužit jako referenční body pro konstrukci **inerciální** vztažné soustavy, vzhledem ke které by bylo možné studovat pohyb ostatních těles, na které vtištěné síly působí.

Existence bezsilových hmotných bodů je však velmi problematická, neboť na každý hmotný bod působí gravitace ostatních bodů a on je zároveň zdrojem gravitace pro ostatní body. Nicméně pokud se elektricky neutrální hmotné body pohybují v dostatečně velké vzdálenosti od ostatních těles, můžeme je s jistou přesností považovat za bezsilové a použít ke konstrukci vztažných soustav jejichž inerciálnost je dostatečná.

Za takové hmotné body můžeme považovat například hvězdy, takže téměř dokonale inerciální je systém, jehož počátek je ve středu Slunce a jehož osový trojhran je v klidu vůči okolním hvězdám (viz[7], kap.I.4). Pro mnoho úloh (typicky takových, kde studovaný pohyb trvá několik sekund či minut, t.j. $t << 24$ hodin) se ukazuje dostatečné považovat za inerciální soustavu spojenou se Zemí nebo místností, ve

které se provádí mechanické experimenty (a ve které působí homogenní gravitační síla). Jejich neinerciálnost se projeví až po delším čase (např. Foucaultovo kyvadlo). Alternativou hledání inerciální soustavy je možnost "napřímit dráhy" hmotných bodů odečtením vlivu gravitačních a setrvačných sil, což souvisí s principy Obecné teorie relativity a zachází daleko za cíle tohoto textu.
Otázka: *Je kosmická loď na oběžné dráze kolem Země, vůči které se předměty pohybují rovnoměrně přímočaře, inerciální soustavou?*

Obecně se dá říci, že 1. Newtonův zákon – zákon setrvačnosti definuje vlastnosti inerciálních vztažných systémů a jejich kartézské souřadnice činí *fyzikálně privilegovanými pro formulaci 2. Newtonova zákona ve tvaru* (2), který existenci inerciální soustavy a kartézských souřadnic předpokládá.

Je snadné ukázat, že inerciální soustava souřadnic není určena jednoznačně. Inerciálnost vztažné soustavy dané počátkem o a ortonormální bazí $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ je definována tak, že kartézské souřadnice[13] bezsilových bodů $x_j(t) \equiv x_j(b(t))$ splňují rovnice

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2}(t) = 0. \tag{28}$$

Pokusme se zjistit, jaké transformace nezmění inerciálnost vztažné soustavy $(o, (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n))$.

Provedeme-li na čase závislý přechod ke kartézské soustavě souřadnic dané počátkem $\tilde{o} = \tilde{o}(t)$ a ortonormální bazí $(\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n)$, kde $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}(t),\ S(t) \in O(3)$, pak podle transformačního vzorce

$$\tilde{x}_i(b(t)) = S_{ji}(t)\,(x_j(b(t)) - x_j(\tilde{o}(t))), \tag{29}$$

který je inverzí vzorce (13) pro $S^{-1} = S^T$, dostáváme

$$\frac{d^2 \tilde{x}_i}{dt^2}(t) \equiv \ddot{\tilde{x}}_i = \ddot{S}_{ji}(x_j - \tilde{o}_j) + 2\dot{S}_{ji}(\dot{x}_j - \dot{\tilde{o}}_j) + S_{ji}(\ddot{x}_j - \ddot{\tilde{o}}_j), \tag{30}$$

kde $x_j(t) := x_j(b(t))$ a $\tilde{o}_j(t) := x_j(\tilde{o}(t))$. Pokud $\tilde{x}_i(t) := \tilde{x}_i(b(t))$ mají být opět kartézké souřadnice bezsilových bodů v inerciální soustavě, tedy

$$(\ddot{x}_i = 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{x}}_i = 0) \ \Leftrightarrow\ (\forall v_i, x_i^0,\ x_i(t) = v_i t + x_i^0 \Rightarrow \tilde{x}_i(t) = \tilde{v}_i t + \tilde{x}_i^0)$$

musí $\dot{S}_{ji} = 0$ a $\ddot{\tilde{o}}_j = \frac{d^2 x_j}{dt^2}(\tilde{o}(t)) = 0$. Počátek nové inerciální soustavy $\tilde{o}$ se tedy musí vůči počátku původní inerciální soustavy o pohybovat rovnoměrně přímočaře

$$\tilde{o}(t) = o + \mathbf{V}t + \mathbf{x}^0$$

a ortogonální transformace bazí $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}$ je v čase konstantní.

[13]Vzhledem k tomu že nadále budeme používat téměř výhradně kartézské souřadnice a ortogonální transformace, které nerozlišují mezi kovariantními a kontravariantními tensory a vektory, budeme nadále psát všechny indexy dole

Vidíme tedy, že *vztažná soustava, jejíž počátek se vůči inerciální soustavě pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí* $\mathbf{V}$ *a vektory její baze se vůči původní bazi neotáčí, je opět inerciální.* Vztah mezi kartézskými souřadnicemi obou inerciálních soustav x_i a $\tilde{x}_i$ je dán vzorcem (29)

$$\tilde{x}_i(b) = S_{ji}(x_j(b) - V_j t - x_j^0). \tag{31}$$

Přidáme-li k těmto transformacím prostorových souřadnic ještě transformace času

$$\tilde{t} = t - t_0, \tag{32}$$

které rovněž nezmění rovnici (28), dostáváme transformace souřadnic prostoru a času, jejichž parametry jsou $(S, \vec{V}, \vec{x}_0, t_0) \in O(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, které se nazývají transformacemi Galileiho. Množina Galileiho transformací je opět grupa vůči skládání.

Cvičení 22 *Napište pravidlo pro skládání Galileiho transformací (grupový součin* $g = (S, \vec{V}, \vec{x}_0, t_0)$ *a* $g' = (S', \vec{V}', \vec{x}'_0, t'_0)$*, t.j.* $(S'', \vec{V}'', \vec{x}''_0, t''_0)$ *jako funkci* $(S', \vec{V}', \vec{x}'_0, t'_0)$ *a* $(S, \vec{V}, \vec{x}_0, t_0)$*.*

Koncem 19. a začátkem 20. století se ukázalo, že vzorec (31) pro transformaci souřadnic bodů prostoru je ve sporu s experimentálně prokázanou konstantní a konečnou rychlostí světla a je nutno jej modifikovat. To vedlo k tzv. Lorentzovým, neboli relativistickým transformacím inerciálních vztažných soustav, které měly přiřazeny i svůj vlastní čas. Vzorec (31) je však plně postačující pro vztažné soustavy, které se vůči sobě pohybují rychlostmi malými ve srovnání s rychlostí světla.

Toto poněkud obtížné zavedení inerciálních soustav je důležité, neboť 2. Newtonův zákon pro pohyb hmotného bodu pod vlivem vtištěných sil ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\,\frac{dx_j}{dt}(t)\right) = F_j(\vec{x}(t), t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{33}$$

kde $m(t)$ je okamžitá[14] hmotnost hmotného bodu,

$$\vec{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) := (x_1(b(t)), x_2(b(t)), x_3(b(t)))$$

a $F_j(\vec{x}, t)$ jsou složky vektorového pole vtištěných sil, *platí pouze pro kartézské nebo přímočaré souřadnice v inerciální soustavě.* Pro obecné (například sférické) souřadnice je třeba použít Lagrangeovu formulaci mechaniky, kterou se budeme zabývat v kapitole 5.

Je dobré si uvědomit, že *při Galileiho transformacích* $(S, \vec{V}, \vec{x}_0, t_0)$ se kartézské složky rychlostí v_i hmotných bodů (a tím pádem i hybností) netransformují jako

[14] většinou konstantní

složky vektorů, ale kvůli vzájemně se pohybujícím počátkům vztažných soustav pro ně díky (31) platí složitější vztahy (porovnej s (29))

$$\tilde{v}_i = S_{ji}(v_j - V_j),\ \tilde{p}_i = S_{ji}(p_j - mV_j). \tag{34}$$

Pro složky momentů hybnosti $L_i := \varepsilon_{ijk}x_j p_k$ pak dostáváme poměrně složitý transformační vtah

$$\tilde{L}_i = S_{ji}\left[L_j - m(\vec{x}\times\vec{V})_j - t(\vec{V}\times\vec{p})_j - (\vec{x}_0\times\vec{p})_j + m(\vec{x}_0\times\vec{V})_j\right]. \tag{35}$$

3.2 Druhý Newtonův zákon v neinerciální soustavě

Jak už bylo řečeno, 2. Newtonův zákon ve tvaru (33) platí v inerciální vztažné soustavě. Nicméně zahrnutím takzvaných zdánlivých sil je možno jej formulovat i v kartézských (nebo přímočarých[15]) souřadnicích soustavy neinerciální.

Předpokládejme, že $(o, \mathbf{e})$ je *inerciální* vztažná soustava, ve které se kartézské souřadnice hmotného bodu vyvíjejí podle (33). Přechod ke kartézským souřadnicím téhož hmotného bodu v soustavě $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$, která se vůči $(o, \mathbf{e})$ pohybuje a je *neinerciální*, je dán transformací (29), kde $S = S(t) \in SO(3)$ a $\tilde{o} = \tilde{o}(t) \in E$. Souřadnice pohybujícího se bodu b lze tedy zapsat ve tvaru

$$\tilde{x}_i(t) \equiv \tilde{x}_i(b(t)) = S_{ji}(t)[x_j(b(t)) - x_j(\tilde{o}(t))]. \tag{36}$$

Použitím tohoto vztahu a jeho inverze dostaneme vyjádření složek zrychlení bodu b v neinerciální soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ ve tvaru

$$\ddot{\tilde{x}}_i(b(t)) = S_{ji}\left[\ddot{x}_j(b(t)) - 2\dot{S}_{jk}\dot{\tilde{x}}_k(b(t)) - \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_k(b(t)) - \ddot{x}_j(\tilde{o}(t))\right]. \tag{37}$$

Cvičení 23 *Dokažte vztah (37).*

První člen na pravé straně $S_{ji}\ddot{x}_j(b)$ je podle 2. Newtonova zákona (pro $\dot{m} = 0$) a díky (22) úměrný kartézským souřadnicím vtištěných sil $\mathbf{F}(b, t)$ v bodě $b(t)$ vyčíslených v soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$.

$$S_{ji}(t)\, m\, \ddot{x}_j(b(t)) = S_{ji}(t)\, F_j(\vec{x}(b(t)), t) = \tilde{F}_i(\vec{\tilde{x}}(b(t)), t) \equiv \tilde{F}_i(\vec{\tilde{x}}(t), t),$$

kde v druhém rovnítku jsme použili předpis pro transformaci složek síly jako vektorového pole. Znamená to, že 2. Newtonův zákon zapsaný v kartézských souřadnicích neinerciální soustavy má (pro $\dot{m} = 0$) tvar

$$m\,\frac{d^2\tilde{x}_i}{dt^2}(t) = \tilde{F}_i(\vec{\tilde{x}}(t), t) + \tilde{Z}_i(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{38}$$

[15]Použití přímočarých nekartézských souřadnic ale nepřináší většinou žádnou početní výhodu, proto se téměř nepoužívá

kde

$$\tilde{Z}_i(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), t) := -m\, S_{ji} \left[2\dot{S}_{jk}\dot{\tilde{x}}_k(b(t)) + \ddot{S}_{jk}\tilde{x}_k(b(t)) + \ddot{x}_j(\tilde{o}(t)) \right] \tag{39}$$

jsou složky takzvaných **zdánlivých sil**, které vznikají vlivem neinerciálnosti soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}}) = (o + \mathbf{w}(t), \mathbf{e} \cdot S(t))$. Zavedeme-li "matici úhlové rychlosti otáčení baze $\tilde{\mathbf{e}}$ vůči $\mathbf{e}$" předpisem

$$\tilde{\omega}_{ik} := -(S^T \dot{S})_{ik} = -\tilde{\omega}_{ki} \tag{40}$$

plynoucím z

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{e} \cdot \dot{S} = \tilde{\mathbf{e}} \cdot S^{-1} \cdot \dot{S},$$

dostaneme zdánlivé síly ve tvaru

$$\tilde{Z}_i(\vec{\tilde{x}}(t), \dot{\vec{\tilde{x}}}(t), t) = m \left[2\tilde{\omega}_{ik}\dot{\tilde{x}}_k(b(t)) - (\tilde{\omega}^2)_{ik}\tilde{x}_k(b(t)) + \dot{\tilde{\omega}}_{ik}\tilde{x}_k(b(t)) - S_{ki}\ddot{x}_k(\tilde{o}(t)) \right], \tag{41}$$

a volbou[16] $\tilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_k$ t.j. $\vec{\tilde{\Omega}} := (\tilde{\omega}_{23}, \tilde{\omega}_{31}, \tilde{\omega}_{12})$ lze ukázat, že první, druhý a třetí člen jsou síly Coriolisova, odstředivá a Eulerova, takže *druhý Newtonův zákon v kartézských souřadnicích libovolné neinerciální soustavy* má tvar[17]

$$m\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t) + 2m\,\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega}(t) + m\,\vec{\Omega}(t) \times (\vec{x} \times \vec{\Omega}(t)) + m\,\vec{x} \times \dot{\vec{\Omega}} - m\vec{a}_{\tilde{o}}(t), \tag{42}$$

kde $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$ jsou *složky (pseudo)vektoru* $\mathbf{\Omega}(t)$ *okamžité úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy* $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ *vzhledem k inerciální* (viz cvičení 26), a poslední člen $a_{\tilde{o}}(t)$ je tzv. unášivé zrychlení plynoucí z případného nerovnoměrného pohybu počátku $\tilde{o}$ neinerciální soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ vůči inerciální $(o, \mathbf{e})$.

Cvičení 24 *Nechť*

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jaké odpovídá transformaci? Spočítejte $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Cvičení 25 *Ukažte, že pro libovolné* $\vec{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) \in \mathbf{R}^3$

$$(S^T\dot{S})_{ij}\tilde{y}_j = -\tilde{\omega}_{ij}\tilde{y}_j = (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{y}})_i, \quad (\tilde{\omega}^2)_{ik}\tilde{y}_k = (\vec{\tilde{\Omega}} \times (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{y}}))_i.$$

Cvičení 26 *Ukažte, že* $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i = \tilde{\omega}_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_j$ *a pro složky vektoru* $\mathbf{Y}(t) = Y_i(t)\mathbf{e}_i = \tilde{Y}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t)$ *platí* $\frac{d}{dt}\vec{\tilde{Y}} = \frac{d}{dt}(\vec{Y}) \cdot S - \vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{Y}}$.

[16] Zde předpokládáme, že base $\tilde{e}$ je souhlasně orientována s orientací určující směr vektorového součinu. V případě nesouhlasně orientované base by se změnilo znaménko složek pseudovektoru $\mathbf{\Omega}$.

[17] Pro přehlednost zde vynecháváme vlnky, takže všechny vektory $\vec{Y}$, představují souřadnice vektoru $\mathbf{Y}$ v neinerciální kartézské soustavě.

3.3 Soustava hmotných bodů, třetí Newtonův zákon

Nechť síly v soustavě N hmotných bodů b_α, $\alpha = 1, \ldots, N$, závisí pouze na jejich polohách a body mezi sebou nemají žádné předem dané vazby. Pak pohybové rovnice bodů soustavy mají tvar

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \vec{F}_\alpha^{(e)}(\vec{x}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta), \quad \alpha = (1, \ldots, N), \tag{43}$$

kde $\vec{x}_\alpha$ jsou kartézské souřadnice bodů b_α v inerciální vztažné soustavě, $F_\alpha^{(e)}$ představují vnější síly působící na každý bod a $F_{\alpha\beta}$ jsou síly, kterými působí body b_β na body b_α.

Zavedeme-li souřadnice celé soustavy jako

$$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_{3N}) = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N),$$

pak pohybové rovnice soustavy (43) představují soustavu $3N$ diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\ddot{X}_j(t) = F_j(\vec{X}(t)), \quad j = 1, \ldots, 3N, \tag{44}$$

kde

$$\vec{F}(\vec{X}) = (\vec{F}_1(\vec{X}), \ldots, \vec{F}_N(\vec{X})) = (F_1(\vec{X}), \ldots, F_{3N}(\vec{X})).$$

Pokud neplatí, že $\vec{F}_\alpha(\vec{X}) \equiv \vec{F}_\alpha(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \vec{F}_\alpha(\vec{x}_\alpha)$, (to znamená že síla působící na bod b_α závisí i na poloze ostatních bodů, t.j. body vzájemně interagují), pak z matematického hlediska se jedná o velmi těžkou úlohu, kterou lze obecně řešit pouze pro dva hmotné body splňující 3. Newtonův zákon v jeho silné verzi, viz kapitolu 3.4. Nicméně i pro složitější systémy lze díky třetímu Newtonovu zákonu získat některé dílčí výsledky.

Třetí Newtonův zákon (akce a reakce), který je vlastně předpokladem o charakteru působících sil, má dvě verze, silnou a slabou. Slabá verze tvrdí[18], že síla,

[18] Ve skutečnosti 3. Newtonův zákon nemusí platit ani ve své slabé verzi a je třeba jej v každém konkrétním případě ověřovat. Máme-li, například dvě smyčky drátu, ve kterých proudí stacionární elektrické proudy j_1 a j_2, pak segment $\vec{ds}_1$ (analog hmotného bodu) v bodě $\vec{r}_1$ vytváří v bodě $\vec{r}_2$ magnetické pole $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_1 \vec{ds}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3$ a síla, kterou působí na segment $\vec{ds}_2$ v bodě $\vec{r}_2$ je

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_1 j_2 \frac{\vec{ds}_2 \times [\vec{ds}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3},$$

takže

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_1 j_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \left[\vec{ds}_1(\vec{ds}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) - \vec{ds}_2(\vec{ds}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)) \right],$$

což není nutně nula. Na druhé straně po vyintegrování přes obě dvě smyčky se síly vyruší.

$\vec{F}_{\beta\alpha}$ kterou hmotný bod b_α působí na hmotný bod b_β má stejnou velikost ale opačný směr než síla, $\vec{F}_{\alpha\beta}$ kterou hmotný bod b_β působí na hmotný bod b_α

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}. \tag{45}$$

Ve své silné verzi zákon říká, že síly navíc směřují ve směru spojnice poloh hmotných bodů, tedy

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) f_{\alpha\beta}(|\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta|) = (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}), \tag{46}$$

kde $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$. Je dobré si uvědomit, že silná formulace 3. Newtonova zákona je ekvivalentní předpokladu, že vzájemné síly je možné získat jako gradient potenciálu

$$U_{\alpha\beta}(r) := -\int f_{\alpha\beta}(r)\, r dr. \tag{47}$$

To je splněno například pro hmotná tělesa, která na sebe vzájemně působí gravitační silou.

Ukážeme důsledky 3. Newtonova zákona pro soustavu hmotných bodů. Platí-li zákon akce a reakce aspoň ve své slabé formě, pak

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$$

a pro souřadnice celkové hybnosti soustavy hmotných bodů $\vec{P}(t) := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha(t)$ *v inerciální soustavě* platí První věta impulsová:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = \vec{F}^{(e)}(\vec{X}(t)) := \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)}(\vec{x}_\alpha(t)), \tag{48}$$

tedy časová změna *celkové hybnosti* je rovna celkové vnější síle, která na soustavu působí, t.j. součtu vnějších sil působících na jednotlivé body. Pro souřadnice *hmotného středu* (těžiště) soustavy hmotných bodů, jejichž hmotnosti jsou v čase konstantní

$$\vec{R}(t) := \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{x}_\alpha(t), \quad M := \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta, \tag{49}$$

pak dostáváme

$$M\frac{d}{dt}\vec{R}(t) = \vec{P}(t) \;\Rightarrow\; M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}(t) = \vec{F}^{(e)}(\vec{X}(t)). \tag{50}$$

Důsledkem (48) a (50) pro tzv. izolovanou soustavou, čímž rozumíme soubor N hmotných bodů které na sebe působí navzájem, ale z vnějšku na ně nepůsobí žádná vtištěná síla (poměrně dobře je tímto způsobem popsána např. sluneční soustava se všemi planetami, měsíci a Sluncem), je že hmotný střed isolované soustavy hmotných bodů se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{P}/M$. Je pak snadné ukázat, že v tom případě lze najít inerciální soustavu $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ ve které složky celkové hybnosti vymizí. Stačí totiž provést Galileovu transformaci (31), kde $\vec{V} = \vec{P}/M$. Tato Galileova transformace je určena až na ortogonální transformaci S a konstantní vektor $\vec{x}_0$. Ten se obvykle volí tak, že počátek inerciální vztažné soustavy $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ je v hmotném středu soustavy hmotných bodů. Tato vztažná soustava se nazývá *soustavou hmotného středu.*

Není-li soustava isolovaná, t.j. na každý hmotný bod působí navíc vnější síla $\vec{F}_\alpha^{(e)}(\vec{x}_\alpha)$, pak soustava hmotného středu není inerciální.

Podobná tvrzení, můžeme odvodit i pro moment hybnosti (impulsmoment) soustavy. Sečteme-li momenty hybnosti všech bodů soustavy

$$\vec{L} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{L}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}_\alpha \times \vec{p}_\alpha, \tag{51}$$

pak z 2. Newtonova zákona dostáváme

$$\dot{\vec{L}} := \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\vec{L}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{x}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta}. \tag{52}$$

Platí-li zákon akce a reakce ve své *silné formě*, pak

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{x}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{x}_\alpha \times (\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = 0,$$

neboť $f_{\alpha\beta}(r) = f_{\beta\alpha}(r)$. Druhá věta impulsová v inerciální soustavě má pak tvar:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = \vec{N}^{(e)}(t) := \sum_{\alpha} \vec{x}_\alpha(t) \times \vec{F}_\alpha^{(e)}(t), \tag{53}$$

tedy časová změna celkového momentu hybnosti je rovna celkovému momentu vnějších sil, které na soustavu působí. Při této příležitosti je dobré si uvědomit dvě věci:

1. Hodnota momentů hybnosti i momentů síly závisí na volbě počátku vztažné soustavy.

2. Přejdeme-li od inerciální soustavy $(o, \mathbf{e})$ k obecně neinerciální soustavě $(o'(t), \mathbf{e}')$, která se vůči inerciální pohybuje *pouze translačním pohybem*, t.j. $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, pak

celkové hybnosti, momenty hybnosti a momenty sil se díky (13) transformují způsobem (viz příklad 1.5 v [1]– cvičení)

$$\vec{P}' = \vec{P} - M\,\dot{\vec{x}}(o'), \tag{54}$$

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{x}(o') \times \vec{P} - M\,\vec{R} \times \dot{\vec{x}}(o') + M\,\vec{x}(o') \times \dot{\vec{x}}(o'), \tag{55}$$

$$\vec{N}'^{(e)} = \vec{N}^{(e)} - \vec{x}(o') \times \vec{F}. \tag{56}$$

Vybereme-li navíc za počátek pohybující se vztažné soustavy hmotný střed soustavy hmotných bodů $o'(t) = R(t)$, pak

$$\vec{P}' = 0,\ \vec{L}' = \vec{L} - R \times \vec{P} \tag{57}$$

a 2. věta impulsová v této neinerciální vztažné soustavě přejde na tvar (příklad 1.7 v [1]– cvičení)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}'(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}\,'_\alpha \times \vec{F}_\alpha{}^{(e)}(\vec{x}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}\,'_\alpha \times \vec{F}_\alpha{}'^{(e)}(\vec{x}\,'_\alpha) = \vec{N}'^{(e)}. \tag{58}$$

Připomeňme, že vztahy (57) a (58) platí v soustavě hmotného středu i když vnější síly jsou nenulové, čili tato soustava není inerciální.

3.4 Problém dvou těles

Úloha o pohybu dvou těles, které na sebe vzájemně působí silami závislými na jejich poloze představuje systém šesti diferenciálních rovnic pro šest funkcí $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{59}$$

$$m_2\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{60}$$

který pro libovolné $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ řešit neumíme. Nicméně, pokud pro síly ve zkoumaném sytému platí třetí Newtonův zákon, pak je možné tuto soustavu zjednodušit, případně převést na úlohu podobnou úloze pro jedno těleso a ve speciálním případě, jako je například Keplerova úloha, i vyřešit.

Tedy, platí li pro síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ třetí Newtonův zákon aspoň ve slabé verzi

$$\vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \tag{61}$$

pak sečtením a rovnic (59) a (60) dostaneme

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = M\ddot{\vec{R}} = 0,$$

kde $\vec{R} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ je souřadnice hmotného středu soustavy, který se tedy v tomto případě pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Pokud platí třetí Newtonův zákon dokonce v silné verzi nebo aspoň

$$\vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\vec{F}_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \tag{62}$$

pak vynásobením rovnic (59), (60) $\frac{1}{m_1}$ respektive $\frac{1}{m_2}$ a odečtením snadno zjistíme, že pro relativní souřadnice soustavy $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ platí

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\,\vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{\mu}\vec{F}(\vec{x}). \tag{63}$$

Pro vzájemné síly splňující (62) tedy lze *převést problém řešení pohybu dvou těles na* (triviální) úlohu o pohybu hmotného středu soustavy a *úlohu o jejich relativním pohybu* (63). Je-li druhá úloha analyticky řešitelná nebo nikoliv, závisí na konkrétním tvaru síly $\vec{F}$. Jejím speciálním případem je centrální isotropní síla řešená v podkapitole 1.1.2.

3.5 Časová střední hodnota, věta o viriálu

Další poznatky o chování soustavy jako celku je možno získat z tzv. věty o viriálu, která pro libovolný počet hmotných bodů udává souvislost mezi střední hodnotou kinetické a potenciální energie soustavy. Ukazuje se totiž, že pro dlouhodobé průměrné hodnoty těchto veličin platí vztahy, které v jednotlivých okamžicích platit nemusí.

Nechť Z je libovolná funkce $2 \times 3N + 1$ proměnných představující nějakou fyzikální veličinu závisející na polohách a rychlostech, případně čase, $Z = Z(\vec{X}, \vec{V}, t)$, kde (jedná se obecně o soustavu N hmotných bodů)

$$\vec{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = (X_1, \ldots, X_{3N}),\ \vec{V} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N) = (V_1, \ldots, V_{3N}).$$

Časovou střední hodnotou $< Z >_{\tilde{X}}$ veličiny Z pro funkci[19] $\tilde{X} = \tilde{X}(t) := (\tilde{X}_1(t), \ldots, \tilde{X}_{3N}(t))$ nazveme

$$< Z >_{\tilde{X}} := \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau Z_{\tilde{X}}(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau Z\left(\tilde{X}(t), \frac{d}{dt}\tilde{X}(t), t\right) dt. \tag{64}$$

Nás budou především zajímat časové střední hodnoty kinetické a potenciální energie pro funkce $\tilde{X}$ popisující časový vývoj souřadnic hmotných bodů pohybujících se podle 2. Newtonova zákona.

[19] V této podkapitole vlnka neznamená souřadnice v nové vztažné soustavě, nýbrž souřadnice závislé na čase v důsledku pohybu hmotných bodů.

Věta 3.1 *Nechť T je kinetická energie soustavy $T = T(\vec{V}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i V_i^2$ a všechny síly v ní působící jsou potenciálové $\vec{F}(\vec{X},t) = -grad\, U(\vec{X},t)$.*

Pak pro libovolné řešení $\tilde{X}$ Newtonových pohybových rovnic, které spolu s první derivací nenabývají nekonečných hodnot platí

$$< T >_{\tilde{X}} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} < \vec{F}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha >_{\tilde{X}} . \tag{65}$$

Pokud navíc U je homogenní funkcí X_i stupně k, t.j. $U(\lambda\vec{X},t) = \lambda^k U(\vec{X},t)$ pak

$$< T >_{\tilde{X}} = \frac{k}{2} < U >_{\tilde{X}} . \tag{66}$$

Veličina $\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha$ na pravé straně (65) se nazývá **viriál** soustavy.

Důkaz (viz též [1], kap.2.5) je založen na faktu, že kinetickou energii můžeme pro libovolné řešení pohybových rovnic zapsat pomocí časové derivace funkce[20] $G := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha = \sum_{i=1}^{3N} m_i V_i X_i$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\tilde{X}}_i \dot{\tilde{X}}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\tilde{X}}_i \tilde{X}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{\tilde{X}}_i \tilde{X}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{G} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i \tilde{X}_i,$$

tedy

$$< T >_{\tilde{X}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} < \tilde{F}_i \tilde{X}_i > = \frac{1}{2}\lim_{\tau -> \infty} \frac{\tilde{G}(\tau) - \tilde{G}(0)}{\tau}.$$

Pokud $\tilde{X}_i, \dot{\tilde{X}}_i$ jsou omezené, pak pravá strana je rovna nule, z čehož plyne (65). Pro homogenní potenciál

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i X_i = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial X_i} X_i = -k\, U(X,t), \tag{67}$$

odkud plyne (66).

Cvičení 27 *Dokažte poslední rovnost v (67). Kolik je k pro Coulombický potenciál a pro lineární harmonický oscilátor?*

Pokud $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, pak celková energie soustavy je $E = T + U$, a z věty o viriálu dostáváme podíly středních hodnot kinetické a potenciální energie na celkové.

$$< T >_{\tilde{X}} = \frac{k}{k+2} < E >_{\tilde{X}}, \; < U >_{\tilde{X}} = \frac{2}{k+2} < E >_{\tilde{X}} . \tag{68}$$

[20] která se někdy rovněž nazývá viriál

4 Mechanika tuhého tělesa

Mechanika tuhého tělesa popisuje například pohyb kamene hozeného do vzduchu, změnu osy rotace Země, fyzikální kyvadlo nebo "setrvačníky" t.j. tělesa otáčející se okolo pevného bodu.

4.1 Popis pohybu a fyzikálních veličin

Tuhé těleso je možno aproximovat jako soustavu hmotných bodů b_α svázaných vazbami $|b_\alpha - b_\beta| = r_{\alpha\beta} = const$. Můžeme mu přiřadit vztažnou soustavu $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ "pevně spojenou s tělesem", vůči které jsou všechny body tuhého tělesa v klidu, t.j. $\frac{d}{dt}\vec{\tilde{x}}(b(t)) = 0$. Pohyb tuhého tělesa je pak určen pohybem této (obecně *neinerciální*) vztažné soustavy $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ vůči nějaké referenční *inerciální* soustavě $(o, \mathbf{e})$.

Druhá věta impulsová pro časový vývoj momentu hybnosti v inerciální soustavě má jednoduchý tvar (53). Chceme-li popsat pohyb tuhého tělesa je vhodné vyjádřit složky momentu hybnosti v obou soustavách. Pohybové rovnice tuhého tělesa jsou pak dány Druhou větu impulsovou zapsané v soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ pevně spojené s tělesem.

Pro souřadnice každého bodu tuhého tělesa vzhledem k inerciální soustavě $(o, \mathbf{e})$ díky (14) platí

$$\vec{x}(b(t)) = S(t) \cdot \vec{\tilde{x}}(b(t)) + \vec{x}(\tilde{o}(t)), \tag{69}$$

z čehož plyne, že pohyb libovolného bodu uvnitř tělesa je dán pohybem (zatím libovolně zvoleného) počátku $\tilde{o}(t)$ a otáčením okolo něj vyjádřeným maticí $S(t)$. Rychlost tohoto bodu pak je (závislost na t je vynechána)

$$\dot{\vec{x}}(b) = \dot{S} \cdot \vec{\tilde{x}}(b) + \dot{\vec{x}}(\tilde{o}) = (\dot{S}S^T) \cdot [\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{o})] + \dot{\vec{x}}(\tilde{o}). \tag{70}$$

Zavedeme-li, podobně jako v kapitole 3.2, $\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$, kde ale $\omega_{jk} := -(\dot{S}S^T)_{jk} = -\omega_{kj}$ (porovnej s (40)), pak Ω_i jsou opět složky okamžité úhlové rychlosti otáčení neinerciální baz $\tilde{\mathbf{e}}$ vzhledem k $\mathbf{e}$, avšak v bazi $\mathbf{e}$, tedy složky $\mathbf{\Omega}(t)$ vzhledem k nepohyblivé soustavě $(o, \mathbf{e})$. Pro souřadnice bodů $b_\alpha(t)$ tuhého tělesa v soustavě $(o, \mathbf{e})$ tedy platí

$$\dot{\vec{x}}(b_\alpha(t) - \tilde{o}(t)) = \vec{\Omega}(t) \times [\vec{x}(b_\alpha(t) - \tilde{o}(t))]. \tag{71}$$

Odtud je vidět, že okamžitá úhlová rychlost otáčení všech bodů tělesa okolo počátku soustavy $\tilde{o}$ je stejná (což je víceméně zřejmé) a že nezávisí na výběru počátku.

Cvičení 28 *Ukažte, že ω_{ij} a $\tilde{\omega}_{ij}$ jsou složky jednoho a téhož tensoru v různých bazích a $\vec{\Omega}$ a $\vec{\tilde{\Omega}}$ jsou složky jednoho a téhož (pseudo)vektoru v různých bazích, t.j.*

$$\Omega_j(t)\mathbf{e}_j = \tilde{\Omega}_j(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t) = \mathbf{\Omega}(t).$$

Návod: Použijte vzorec pro transformaci bazí a definice $\vec{\Omega}(t)$ a $\vec{\tilde{\Omega}}(t)$.

Kvůli odvození pohybových rovnic tuhého tělesa rozložíme v každém čase t přechod mezi inerciální soustavou $(o, \mathbf{e})$ a neinerciální $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ na dva kroky – translaci a rotaci: přechod od $(o, \mathbf{e})$ k $(o', \mathbf{e}') = (\tilde{o}(t), \mathbf{e})$ a přechod od $(o', \mathbf{e}') = (\tilde{o}(t), \mathbf{e})$ k $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$.

Složky momentu hybnosti $\mathbf{L}_\alpha$ bodu $b_\alpha(t)$ vzhledem k $o' = \tilde{o}(t)$ v soustavě $(o', \mathbf{e}')$ pak díky (71) mají v každém čase t tvar

$$\vec{L}'_\alpha = m_\alpha\, \vec{x}(b_\alpha - \tilde{o}) \times \dot{\vec{x}}(b_\alpha - \tilde{o}) = m_\alpha\, \vec{q}_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha), \tag{72}$$

kde

$$\vec{q}_\alpha := \vec{x}\,'(b_\alpha) = \vec{x}(b_\alpha - \tilde{o}).$$

Vzhledem k tomu, že $\vec{q}_\alpha, \vec{L}'_\alpha$ i $\vec{\Omega}$ představují složky (pseudo)vektorů v bazi $\mathbf{e}$, složky téhož momentu hybnosti v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$ jsou

$$\vec{\tilde{L}}_\alpha = m_\alpha\, \vec{\tilde{q}}_\alpha \times (\vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{\tilde{q}}_\alpha), \tag{73}$$

kde

$$\vec{\tilde{q}}_\alpha = \vec{\tilde{x}}(b_\alpha).$$

Cvičení 29 *Ukažte, že pokud $\vec{X}, \vec{\tilde{X}}$ a $\vec{Y}, \vec{\tilde{Y}}$ jsou složky vektorů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ v ortonormálních bazích $\mathbf{e}$ a $\tilde{\mathbf{e}}$, pak trojice čísel $Z_i = \varepsilon_{ijk} X_j Y_k,\ \tilde{Z}_i = \pm\varepsilon_{ijk} \tilde{X}_j \tilde{Y}_k,\ i = 1, 2, 3$ jsou složky jednoho a téhož (pseudo)vektoru $\mathbf{Z}$ v bazích $\mathbf{e}$ a $\tilde{\mathbf{e}}$. Čím je dáno znaménko u $\tilde{Z}_i$?*

Důležitá vlastnost souřadnic $\vec{\tilde{q}}_\alpha$ pohybujícího se bodu tělesa $b_\alpha(t)$ je, že (na rozdíl od souřadnic $\vec{q}_\alpha$) nezávisí na čase, neboť soustava $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ je pevně spojená s tělesem. Vyjádříme-li složky pseudovektoru $\vec{\tilde{L}}_\alpha$ ve složkách $\vec{\tilde{\Omega}}, \vec{\tilde{q}}_\alpha$ dostaneme[21]

$$\tilde{L}_{\alpha,i} = m_\alpha \varepsilon_{ijk} \tilde{q}_{\alpha,j} (\varepsilon_{klm} \tilde{\Omega}_l \tilde{q}_{\alpha,m}) = \tilde{I}_{\alpha,il} \tilde{\Omega}_l, \tag{74}$$

kde

$$\tilde{I}_{\alpha,il} := m_\alpha \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \tilde{q}_{\alpha,j} \tilde{q}_{\alpha,m} = m_\alpha (\delta_{il}\, \vec{\tilde{q}}_\alpha \cdot \vec{\tilde{q}}_\alpha - \tilde{q}_{\alpha,i} \tilde{q}_{\alpha,l}) = \tilde{I}_{\alpha,li}. \tag{75}$$

jsou složky momentu setrvačnosti bodů b_α v soustavě $(\tilde{o}, \tilde{\mathbf{e}})$ spojené s tělesem a z jejich definice je zřejmé, že v této soustavě rovněž nezávisí na čase.

V aproximaci tuhého tělesa soustavou hmotných bodů jsou *složky celkového momentu hybnosti vzhledem k bodu $\tilde{o}$ v bazi* $\tilde{\mathbf{e}}$ rovny součtu momentů všech bodů

$$\tilde{L}_i = \sum_\alpha \tilde{L}_{\alpha,i} = \tilde{\Omega}_l \sum_\alpha \tilde{I}_{\alpha,li} = \tilde{\Omega}_l \tilde{I}_{li}. \tag{76}$$

[21] α číslují body tuhého tělesa i, j, k číslují složky (pseudo)vektorů v neinerciální soustavě.

Přejdeme-li od diskrétní aproximace ke spojitému prostředí, pak z (75) a (76) plyne

$$\tilde{I}_{li} = \tilde{I}_{il} = \int_\tau \rho(\tilde{x})(\delta_{il}\vec{\tilde{x}} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tilde{x}_l\tilde{x}_i)d^3\tilde{x}. \tag{77}$$

Tyto veličiny představují složky symetrického tensoru $\mathbf{I}$ v bazi $\tilde{\mathbf{e}}$, který se nazývá moment setrvačnosti tělesa vzhledem k bodu $\tilde{o}$ a určuje vztah mezi úhlovou rychlostí otáčení tělesa a jeho momentem hybnosti. V integrálu (76) $\rho(\tilde{x})$ představuje hustotu hmoty a $\tilde{x}$ jsou souřadnice bodů uvnitř tělesa τ v soustavě pevně spojené s tělesem.

Vzhledem k tomu, že moment setrvačnosti je symetrický tensor, *je možné vybrat bazi* $\tilde{\mathbf{e}}$ *tak, že mimodiagonální složky* $\tilde{I}_{li},\ l \neq i$ *vymizí* (diagonalizace symetrické formy) a diagonální složky můžeme označit $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$. Osy souřadné, které ukazují ve směru těchto $\tilde{\mathbf{e}}_i$ nazýváme *hlavní osy setrvačnosti tělesa*. Moment hybnosti tělesa, pak má složky

$$\vec{\tilde{L}} = (\tilde{I}_1\tilde{\Omega}_1, \tilde{I}_2\tilde{\Omega}_2, \tilde{I}_3\tilde{\Omega}_3). \tag{78}$$

Vyjádření momentu hybnosti ve tvaru (72) můžeme využít i k vyjádření kinetické energie otáčení bodu b_α okolo $\tilde{o}$.

$$T_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha \left((\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m_\alpha \left(\vec{q}_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha)\right) \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{L}_\alpha \cdot \vec{\Omega}, \tag{79}$$

kde jsme v třetím rovnítku použili cykličnost smíšeného součinu $(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ pro $\vec{A} = \vec{q}_\alpha,\ \vec{B} = \vec{\Omega} \times \vec{q}_\alpha,\ \vec{C} = \vec{\Omega}$. Pro kinetickou energii otáčení tělesa okolo $\tilde{o}$ pak dostáváme vzorec

$$T = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\tilde{L}} \cdot \vec{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2}(\tilde{I} \cdot \vec{\tilde{\Omega}}) \cdot \vec{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2}\tilde{I}_{li}\tilde{\Omega}_i\tilde{\Omega}_l. \tag{80}$$

4.2 Pohybové rovnice tuhého tělesa, bezsilový setrvačník

Zvolíme-li za počátek soustavy $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ hmotný střed tělesa $\tilde{o}(t) = R(t)$, pak pohyb tuhého tělesa je určen pohybem hmotného středu tělesa a otáčením okolo něj. Pohyb hmotného středu je dán první větou impulsovou

$$M\,\ddot{\vec{R}}(t) = \vec{F}^{(e)},$$

a rovnice pro otáčivý pohyb $S(t)$ vyplývají z druhé věty impulsové v soustavě hmotného středu (58)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}' = \vec{N}'^{(e)}. \tag{81}$$

Připomeňme, že $\vec{L}'$ jsou složky celkového momentu hybnosti tělesa *v obecně neinerciální soustavě* $(o', \mathbf{e}')$ a $\vec{N}'^{(e)}$ je celkový moment vnějších sil, které na těleso působí.

Vzhledem k tomu, že složky momentu setrvačnosti je rozumné počítat vzhledem k soustavě $(\tilde{o}(t), \tilde{\mathbf{e}}(t))$ pevně spojené s tělesem , která se vůči $(o', \mathbf{e}')$ otáčí, je vhodné přepsat i 2. větu impulsovou do této soustavy, ve které $\tilde{I}_{li}$ nezávisí na čase. Z transformačních vlastností (pseudo)vektoru $\mathbf{L}$ při změně baze snadno odvodíme

$$\frac{d}{dt}\vec{L}' = \frac{d}{dt}(S \cdot \vec{\tilde{L}}) = \dot{S} \cdot \vec{\tilde{L}} + S \cdot \dot{\vec{\tilde{L}}} \tag{82}$$

a s využitím (40) a (81) odsud dostaneme 2. větu impulsovou v soustavě spojené s tělesem ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\vec{\tilde{L}} + \tilde{\Omega} \times \vec{\tilde{L}} = \vec{\tilde{N}}^{(e)}, \tag{83}$$

kde $\vec{\tilde{N}}^{(e)} = \vec{\tilde{N}}^{(e)}(t) = \vec{N}'^{(e)}(t) \cdot S(t)$.

Vyjádříme-li $\vec{\tilde{L}}$ pomocí momentu setrvačnosti tělesa způsobem (76), obdržíme tzv. *Eulerovy setrvačníkové rovnice*

$$\tilde{I}_{il}\dot{\tilde{\Omega}}_l - \varepsilon_{ijk}\tilde{I}_{jm}\tilde{\Omega}_m\tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)}, \tag{84}$$

které určují časovou závislost rychlosti úhlové rotace $\boldsymbol{\Omega}(t)$ tělesa s momentem setrvačnosti $\mathbf{I}$. Eulerovy rovnice tedy nejsou nic jiného než druhá věta impulsová zapsaná v neinercální soustavě tuhého tělesa a veličiny v nich vystupující jsou zapsány *ve složkách v soustavě pevně spojené s tělesem*, jejíž počátek je v hmotném středu tělesa. Pokud složky momentu vnějších sil na pravé straně Eulerových rovnic jsou nenulové, jedná se o velmi složitou soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu pro rotační matici $S(t)$, která vystupuje jak ve složkách $\tilde{\Omega}_j$ úhlové rychlosti, tak ve složkách momentu vnější síly $\vec{\tilde{N}}^{(e)}(t) = \vec{N}'^{(e)}(t) \cdot S(t)$. Je-li moment vnějších sil nulový, dostáváme soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu pro složky úhlové rychlosti v soustavě pevně spojené s tělesem $\tilde{\Omega}_j(t)$, ze kterých je pak možno počítat matici $S(t)$ určující otáčivý pohyb tělesa (viz cvičení 30 a 32).

Pokud například na tuhé těleso nepůsobí žádné vnější síly, $\vec{F}_\alpha^{(e)} = 0$, jedná se o izolovanou soustavu, kde $\vec{N}^{(e)} = 0$ – tzv. bezsilový setrvačník. V tom případě se hmotný střed tělesa pohybuje rovnoměrně přímočaře a Eulerovy setrvačníkové rovnice se zjednoduší na

$$\tilde{I}_{il}\dot{\tilde{\Omega}}_l = \varepsilon_{ijk}\tilde{I}_{jm}\tilde{\Omega}_m\tilde{\Omega}_k. \tag{85}$$

Předností soustavy pevně spojené s tělesem je, že složky tensoru setrvačnosti jsou pak na čase nezávislé, což podstatně zjednodušuje řešení. V bazi zvolené navíc ve směrech hlavních os momentu setrvačnosti[22] mají diferenciální rovnice (85) tvar

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1\dot{\tilde{\Omega}}_1 &= (\tilde{I}_2 - \tilde{I}_3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3, \\ \tilde{I}_2\dot{\tilde{\Omega}}_2 &= (\tilde{I}_3 - \tilde{I}_1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1, \\ \tilde{I}_3\dot{\tilde{\Omega}}_3 &= (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2. \end{aligned} \tag{86}$$

Z těchto rovnic je okamžitě vidět, že pro těleso, které má složky momentu setrvačnosti v hlavních osách stejné $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$ (například homogenní koule), je $\vec{\tilde{\Omega}}(t) = const.$, takže těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí stále ve stejném směru.

Pokud $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$ (symetrický setrvačník), pak řešení rovnic (86) je

$$\tilde{\Omega}_1 = C\,\sin\left(\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1}\,\tilde{\Omega}_3 t - \varphi_0\right),\ \tilde{\Omega}_2 = C\,\cos\left(\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1}\,\tilde{\Omega}_3 t - \varphi_0\right),\ \tilde{\Omega}_3 = const.$$

Odtud plyne, že v tomto případě se směr pseudovektoru $\mathbf{\Omega}(t)$ se otáčí okolo třetí hlavní osy setrvačnosti tělesa $\tilde{z}$ rychlostí $\frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_3}{\tilde{I}_1}\tilde{\Omega}_3$, ale rychlost otáčení $|\mathbf{\Omega}(t)|$ je v čase konstantní (odtud název setrvačník). Tento pohyb pseudovektoru $\mathbf{\Omega}(t)$ (pohyb osy otáčení uvnitř tělesa!) se nazývá **precese**. S tím souvisí fakt, že směr osy otáčení Země (kterou je možno v jisté aproximaci považovat za zploštělý elipsoid) se s časem mění, zatímco její rychlost zůstává v této aproximaci stejná. Úhel, který svírá $\mathbf{\Omega}(t)$ s osou $\tilde{z}$ se nazývá **úhel nutace** a platí pro něj

$$\cos\theta = \tilde{\Omega}_3/|\mathbf{\Omega}| = \tilde{\Omega}_3/\sqrt{C^2 + \tilde{\Omega}_3^2}.$$

Pro symetrický setrvačník $\cos\theta = const.$, ale v obecném případě nikoliv.

Pokud $\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3, \tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_3$, pak řešení Eulerových rovnic je poměrně složité a lze je vyjádřit v termínech tzv. Jacobiho eliptických funkcí (podobně jako přesné řešení matematického kyvadla).

Poznamenejme ještě, že vyřešením složek $\tilde{\Omega}_m(t)$ z Eulerových setrvačníkových rovnic ještě není otáčivý pohyb tělesa určen, neboť ten je dán maticí $S(t)$, takže pro nalezené $\tilde{\Omega}_m(t)$ je třeba ještě řešit rovnice

$$S_{ki}(t)\,\dot{S}(t)_{kj} = (S^T(t)\cdot\dot{S}(t))_{ij} = -\tilde{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijm}\tilde{\Omega}_m(t)$$

pro složky ortogonální matice S.

Cvičení 30 ** Nalezněte matici otáčení S pro homogenní kouli v bezsilovém prostředí.*

[22] tzv. polární baze

Cvičení 31 *Ukažte, že pro těleso v homogenním gravitačním poli je* $\vec{\vec{N}}^{(e)} = 0$*, takže pro ně platí stejné rovnice (86) jako pro bezsilový servačník.*

Cvičení 32 ** Určete pohyb bodu na povrchu homogenní koule v homogenním gravitačním poli.*

5 Lagrangeova formulace mechaniky

Newtonovská formulace mechaniky hmotných bodů je formulována v kartézských souřadnicích, které pro popis některých systémů, například pohyb v poli centrálních sil, nemusí být nejvhodnější. Mimo to pro hmotné body, které se pohybují nejen pod vlivem vtištěných sil ale jsou rovněž *podřízeny nějakým vazbám*, operuje s intuitivně náročným pojmem vazbových sil.

Příklad: *Rovinné matematické kyvadlo. Hmotný bod se pohybuje pod vlivem konstantní gravitační síly, ale jeho pohyb je omezen na kružnici*

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0, \;\; z = 0, \tag{87}$$

kde l je délka (pevného) závěsu. Newtonovy rovnice pohybu mají tvar

$$m\ddot{x} = F_x^{(v)}, \tag{88}$$
$$m\ddot{y} = mg + F_y^{(v)}, \tag{89}$$
$$m\ddot{z} = F_z^{(v)}, \tag{90}$$

kde

$$\vec{F}^{(v)} = \lambda_1\, gr\vec{a}d(x^2 + y^2 - l^2) + \lambda_2\, gr\vec{a}d(z) = (2\lambda_1 x, 2\lambda_1 y, \lambda_2), \tag{91}$$

je vazbová síla a λ_1, λ_2 *jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory. Rovnice (87) – (90) představují smíšený algebraicko–diferenciální systém pěti rovnic pro pět neznámých funkcí* $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t), \tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t)$. *Z rovnic (88), (89) snadno dostaneme*

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x + gx = 0$$

a zavedením polárních souřadnic $x = \hat{x}(\phi) := l\sin\phi, \;\; y = \hat{y}(\phi) := l\cos\phi, z = \hat{z}(\phi) := 0$, *dostaneme jedinou diferenciální rovnici tvaru*

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0. \tag{92}$$

Z jejího řešení $\tilde{\phi}(t)$ *pak určíme řešení rovnic (87) – (90)*

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(\tilde{\phi}(t)) = l\sin(\tilde{\phi}(t)), \;\; \tilde{y}(t) = \hat{y}(\tilde{\phi}(t)) = l\sin(\tilde{\phi}(t)), \;\; \tilde{z}(t) = \hat{z}(\tilde{\phi}(t)) = 0.$$

Lagrangeovy multiplikátory pak jsou $\tilde{\lambda}_1(t) = m\ddot{\tilde{x}}(t)/\tilde{x}(t), \lambda_2(t) = 0$.

Jiné příklady soustav s vazbami jsou dva hmotné body, spojené nehmotnou tyčkou, nebo jedna částice v gravitačním poli pohybující se po pevném či kutálejícím se válci.

Cílem Lagrangeovy formulace mechaniky je formulace pohybových zákonů v křivočarých souřadnicích, vyloučení vazeb a zahrnutí potenciálových sil do obecnějšího rámce.

Vyloučení vazeb se provádí zavedením tzv. konfiguračního prostoru systému a jeho (křivočarých) souřadnic q^j, (což ve výše uvedeném příkladu byl úhel ϕ) a k vyloučení potenciálových sil se zavádí Lagrangeova funkce.

5.1 Lagrangeova funkce hmotného bodu bez vazeb v poli potenciálových sil

Odvoďme napřed tvar Lagrangeovy funkce pro případ, který snadno popíšeme i v Newtonově formulaci, totiž případ jednoho hmotného bodu *bez vazeb* podrobeného pouze potenciálovým silám $\vec{F}(\vec{x},t) = -grad\, U(\vec{x},t)$. Jinými slovy, přepíšeme Newtonovy pohybové rovnice do Lagrangeovy formulace.

Pohybové rovnice hmotného bodu *bez vazeb* je možno s mírným zneužitím notace zapsat způsobem

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right] = m\,\frac{d}{dt}v_i = m\,a_i = F_i(\vec{x},t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}U(\vec{x},t). \tag{93}$$

Snadno se přesvědčíme, že tuto rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_i}L(\vec{x},\vec{v},t)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}L(\vec{x},\vec{v},t) = 0. \tag{94}$$

kde L je tzv. **Lagrangeova funkce** $L = L(\vec{x},\vec{v},t) := \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{x},t)$, zkráceně $L := T - U$, kde T a U jsou kinetická a potenciální energie.

Je dobré si uvědomit, co rovnice (94) vyjadřuje: Lagrangeova funkce je (v tomto případě) funkcí sedmi *nezávislých* proměnných $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, t)$ a poté, co provedeme parciální derivace naznačené v (94), dosadíme za x_i funkce času $\tilde{x}_i(t)$, za v_i dosadíme $\dot{\tilde{x}}_i(t)$ a provedeme derivaci podle času. Tímto postupem dostaneme soustavu tří diferenciálních rovnic pro funkce $\tilde{x}_i(t)$, která je ekvivalentní druhému Newtonovu zákonu (2) pro hmotný bod v poli potenciálových sil. Přitom, jak vidno z rovnice (94), *veškerá informace o dynamice pohybu je obsažena v jediné Lagrangeově funkci L.*

V případě, že síla působící na hmotný bod závisí i na jeho okamžité rychlosti nebo ne všechny síly jsou potenciální, t.j. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x},\vec{v},t) = -grad\, U(\vec{x},t) + \vec{F}^{(o)}(\vec{x},\vec{v},t)$, pravá strana rovnice (94) je rovna $F_i^{(o)}(\vec{x},\vec{v},t)$.
Otázka: Jak snadno zjistíte, zda síla je potenciálová?

Cvičení 33 *Ukažte, že centrální síla $\vec{F} = \vec{x}\, f(\vec{x},t)$ je potenciálová pouze když je též izotropní, t.j. $\vec{F} = \vec{x}\, f(|\vec{x}|,t)$.*

Existují ale i některé nepotenciální, na rychlostech závislé síly, jejichž působení je možno rovněž zahrnout do Lagrangeovy funkce.

5.1.1 Lorentzova síla, zobecněný potenciál

Mezi síly, které se nám zatím nepodařilo zahrnout do Lagrangeovy funkce patří i fyzikálně velmi důležitá síla Lorentzova, která působí na elektrický náboj pohybující se v elektromagnetickém poli. Důvod je ten, že závisí nejen na poloze ale i na rychlosti pohybujícího se náboje.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = q\left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)\right), \tag{95}$$

kde q je velikost náboje a $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou elektrická intenzita a magnetická indukce (viz [8], kap.4.5) v místě o souřadnicích $\vec{x}$ a v čase t.

Cvičení 34 *Zopakujte si řešení Newtonových rovnic pro Lorentzovu sílu, kde* $\vec{E} = const, \vec{B} = const$.

Vzhledem k tomu že Lagrangeova funkce závisí i na rychlostech, budeme uvažovat i potenciály rovněž závislé na rychlostech: $U = U(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Je snadné pak ukázat, že Lorentzovu sílu lze získat ze zobecněného potenciálu

$$U(\vec{x}, \vec{v}, t) = q\left(\varphi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)\right), \tag{96}$$

kde φ a $\vec{A}$ jsou potenciály elektromagnetického pole pro které platí

$$\vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = rot\,\vec{A}, \tag{97}$$

způsobem

$$F_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_i} U(\vec{x}, \vec{v}, t)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{x}, \vec{v}, t). \tag{98}$$

Znamená to, že i Lorentzovu sílu je možno zahrnout do Lagrangeovy funkce prostřednictvím zobecněného potenciálu (96) a pohybové rovnice pro nabitou částici v elektromagnetickém poli lze opět zapsat ve tvaru (94), kde $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Vzhledem k tomu, že elektromagnetické potenciály jsou určeny až na kalibrační transformace, není odpovídající Lagrangeova funkce určena jednoznačně. Nicméně pohybové rovnice (94), které dostaneme z takto různých Lagrangeových funkcí, jsou identické.

Cvičení 35 *Určete jak se liší Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické potenciály, které se liší o kalibrační transformaci a ukažte, že tento rozdíl nepřispěje k levé straně rovnice (94).*

Cvičení 36 *Ukažte, že síla daná vzorcem (98) je nejvýše lineární v rychlostech pro libovolnou funkci* U.

5.1.2 Obecné souřadnice

Pro některé typy úloh, např. pohyb v poli centrálních isotropních sil (Coulombova síla), je vhodné nahradit kartézské souřadnice x^j křivočarými y^k, což spočívá v substituci $x^j = \hat{x}^j(y^1, \ldots, y^n)$, kde funkce $\hat{x}^j$ jsou spojité, mají spojitou první derivaci a navíc pro ně platí tzv. podmínka regularity

$$det\,\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial y^k} \neq 0. \tag{99}$$

Tato podmínka může znamenat, že křivočaré souřadnice $\vec{y}$ nemůžeme obecně použít na celém fyzikálním prostoru, nýbrž pouze na jeho části, kde je splněna podmínka (99), a pro zbytek (či spíše jeho okolí) najít jiné.

Například sférické souřadnice $y^1 = r, y^2 = \varphi, y^3 = \vartheta$

$$\begin{aligned} x^1 &= \hat{x}^1(r,\vartheta,\varphi) := r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ x^2 &= \hat{x}^2(r,\vartheta,\varphi) := r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ x^3 &= \hat{x}^3(r,\vartheta,\varphi) := r\cos\vartheta \end{aligned} \tag{100}$$

nebo cylindrické souřadnice $y^1 = \rho, y^2 = \varphi, y^3 = z$

$$\begin{aligned} x^1 &= \hat{x}^1(r,\varphi,z) := \rho\cos\varphi, \\ x^2 &= \hat{x}^2(r,\varphi,z) := \rho\sin\varphi, \\ x^3 &= \hat{x}^3(r,\varphi,z) := z \end{aligned} \tag{101}$$

lze použít pouze na $E \setminus \{o + k\mathbf{e}_3,\ k \in \mathbf{R}\}$, t.j. mimo "osu z".

Cvičení 37 *Spočítejte Jacobiány (99) transformací (100) a (101).*

Lagrangeova funkce $\hat{L}$, určující pohybové rovnice v křivočarých souřadnicích $\vec{y}$ a odpovídajících rychlostech, má opět tvar $L = T - U$, ale obě funkce T a U je nutné vyjádřit v křivočarých souřadnicích a rychlostech.

$$\begin{aligned} \hat{L} = \hat{L}(\vec{y},\vec{w},t) &:= L\Big(\vec{\hat{x}}(\vec{y}), (\frac{\hat{d}}{dt}\vec{\hat{x}})(\vec{y},\vec{w}), t\Big) \\ &= T\Big((\frac{\hat{d}}{dt}\vec{\hat{x}})(\vec{y},\vec{w})\Big) - U\Big(\vec{\hat{x}}(\vec{y}), (\frac{\hat{d}}{dt}\vec{\hat{x}})(\vec{y},\vec{w}), t\Big) \\ &= \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\Big((\frac{\hat{d}}{dt}\hat{x}^i)(\vec{y},\vec{w})\Big)^2 - U\Big(\vec{\hat{x}}(\vec{y}), (\frac{\hat{d}}{dt}\vec{\hat{x}})(\vec{y},\vec{w}), t\Big), \end{aligned} \tag{102}$$

kde

$$(\frac{\hat{d}}{dt}\hat{x}^i)(\vec{y},\vec{w}) := \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial y^j}(\vec{y})\, w^j.$$

Důležité je, že, jak ukážeme v odstavci 5.2.2 (i pro obecnější případ systémů s vazbami), *tvar pohybových Lagrangeových rovnic zůstává stejný i v křivočarých souřadnicích*, t.j. platí (94), kde

$$\vec{x} \to \vec{y},\ \vec{v} \to \vec{w},\quad L \to \hat{L}.$$

Cvičení 38 *Spočítejte vyjádření kartézských složek rychlosti a $\vec{v}^{\,2}$ ve sférických a cylindrických souřadnicích.*

5.2 Vazby

Systém N hmotných bodů bez vazeb má $3N$ stupňů volnosti – nezávislých souřadnic, jejichž vývoj v čase je dán 2. Newtonovým zákonem (44), kde $\vec{X}$ jsou kartézské souřadnice v inerciálním systému. Existuje však mnoho mechanických systémů, kde hmotné body jsou podřízeny vazbám, přesněji soustavě podmínek mezi souřadnicemi a rychlostmi, které platí a priori, t.j. bez ohledu na konkrétní časový vývoj – pohyb. Význam Lagrangeova formalismu tkví především v tom, že formálně stejným způsobem jako v podkapitole 5.1 lze zapsat pohybové rovnice mechanických systémů s vazbami (matematické kyvadlo, hmotný bod na sféře, na kutálejícím se válci, soustava pevně propojených hmotných bodů,...).

Nadále budeme předpokládat, že se jedná o tzv. udržovací vazby, což znamená, že vztahy mezi souřadnicemi a rychlostmi lze zapsat pomocí p funkcí f_K způsobem

$$f_K(\vec{X},\vec{V},t) = 0,\ K = 1,\ldots,p, \tag{103}$$

kde (jedná se o soustavy N hmotných bodů)

$$\vec{X} = (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N) = (x_1,\ldots,x_{3N}),\ \vec{V} = (\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_N) = (v_1,\ldots,v_{3N}).$$

Příkladem udržovací vazby je pohyb bodu na povrchu koule na rozdíl od pohybu uvnitř koule.

Podle tvaru funkcí f_K rozeznáváme především vazby holonomní $f_K = f_K(\vec{X},t)$ a neholonomní závislé i na rychlostech. Některé neholonomní vazby mohou být skrytě holonomní, což znamená, že je lze "zintegrovat" na vazby holonomní. Např. podmínku, která má tvar

$$f = f_h(\vec{x},\vec{v}) := \frac{\partial h}{\partial x}v_x + \frac{\partial h}{\partial y}v_y + \frac{\partial h}{\partial z}v_z = (grad\ h).\vec{v} = 0,$$

kde $h = h(\vec{x})$, lze (pro libovolnou $\vec{\bar{x}} = \vec{\bar{x}}(t)$) zapsat způsobem $\frac{d}{dt}h(\vec{\bar{x}}(t)) = 0$, takže tuto neholonomní vazbu můžeme nahradit holonomní vazbou $h(\vec{x}) = const.$ Obecněji, neholonomní vazbu tvaru

$$f = f_{\vec{g}}(\vec{x},\vec{v}) := \vec{g}(\vec{x})\cdot\vec{v} = 0 \tag{104}$$

lze nahradit ekvivalentní holonomní vazbou $h(\vec{x}) = const$, kde $grad\, h(\vec{x}) = \mu(\vec{x})\, \vec{g}(\vec{x})$ a $\mu(\vec{x})$ je tzv. integrační faktor, pokud platí Eulerova podmínka (viz [1] 2.2)

$$\vec{g} \cdot rot\, \vec{g} = 0.$$

Vazby nezávislé na čase $f_K = f_K(\vec{X}, \vec{V}) = 0,\ K = 1, \ldots, p$ nazýváme skleronomní. Vazby (103) závislé na čase se nazývají rheonomní, příkladem je pohyb bodu na kutálejícím se válci.

Vazby které nejsou (aspoň skrytě) holonomní se do Lagrangeovy formulace mechaniky zahrňují velmi obtížně a proto se v dalším omezíme na vazby holonomní.

5.2.1 Lagrangeova funkce pro soustavy s holonomními vazbami

Vazby snižují počet stupňů volnosti (dynamických proměnných – nezávislých funkcí času vyhovujících pohybovým rovnicím). Systém s p holonomními vazbami, pro které jsou funkce f_K nezávislé[23], má počet stupňů volnosti $s = 3N - p$.

Otázka: *Kolik stupňů volnosti má složené matematické kyvadlo? Cihla hozená do vzduchu?*

Podmnožinu vektorů $\vec{X} \in \mathbf{R}^{3N}$ splňujících holonomní vazby

$$f_K = f_K(\vec{X}, t) = 0, \quad K = 1, \ldots, p, \quad p < 3N, \tag{105}$$

kde f_K jsou zadané funkce, nazýváme **konfigurační prostor**. Tato podmnožina obecně není lineární prostor nýbrž (za jistých předpokladů o $f_K(\vec{X}, t)$) tzv. diferenciální varieta, např. kružnice, sféra, torus, … .

V Lagrangeově formulaci mechaniky je třeba především vyřešit vazby. Podle věty o implicitních funkcích lze $3N$ kartézských souřadnic x_i splňujících holonomní vazby zapsat jako funkce $\hat{x}_i$ proměnných $q_j,\ j = 1, \ldots, s$ a času[24]

$$x_i = \hat{x}_i(q_1, \ldots, q_s, t),\ i = 1, \ldots, 3N,\ \Leftrightarrow\ \vec{X} = \hat{\vec{X}}(q, t) \tag{106}$$

tak, že holonomní vazby (105) *jsou splněny pro libovolná* q_j z jejich definiční oblasti, t.j.

$$\hat{f}_K(q, t) := f_K(\hat{\vec{X}}(q, t), t) \equiv 0,\ K = 1 \ldots, p. \tag{107}$$

Proměnné q_j se nazývají **zobecněné souřadnice soustavy**. Konkrétní tvar $\hat{\vec{X}}(q, t)$ pro dané vazby je určen podmínkami (107). Pro derivace $\hat{f}_K$ pak platí

$$\frac{\partial \hat{f}_K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = 0. \tag{108}$$

[23] t.j. hodnost obdélníkové matice $\frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X})$ (kde $K = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, 3N$) je na nějaké otevřené množině v $\mathbf{R}^{3N}$ rovna p

[24] Pozor! Závislost $\hat{x}_i$ na čase není dána pohybem hmotných bodů, nýbrž případnou změnou rheonomních podmínek v čase. Pro skleronomní podmínky funkce (106) nezávisejí na čase.

Příklad : *Dvojité rovinné kyvadlo s rameny l_1, l_2.*

$$N = 2,\ \vec{X} = (x_1, ...x_6),\ p = 4,\ s = 2.$$

Vazby jsou dány funkcemi

$$f_1(\vec{X}, t) = x_1^2 + x_2^2 - l_1^2,\quad f_2(\vec{X}, t) = x_3,$$

$$f_3(\vec{X}, t) = (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 - l_2^2,\quad f_4(\vec{X}, t) = x_6.$$

Zobecněné souřadnice (q_1, q_2) jsou úhly (φ_1, φ_2). Funkce $\hat{\vec{X}}(q, t)$, které identicky splní podmínky (105) jsou

$$\hat{x}_1(\varphi_1, \varphi_2) = l_1 \cos\varphi_1,\ \hat{x}_2(\varphi_1, \varphi_2) = l_1 \sin\varphi_1,$$

$$\hat{x}_3(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

$$\hat{x}_4(\varphi_1, \varphi_2) = l_2 \cos\varphi_2 + l_1 \cos\varphi_1,\ \hat{x}_5(\varphi_1, \varphi_2) = l_2 \sin\varphi_2 + l_1 \sin\varphi_1,$$

$$\hat{x}_6(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Podobným způsobem jako souřadnice můžeme vyjádřit i kartézské rychlosti v_i. Dosadíme-li do (106) za q_j funkce času $\tilde{q}_j(t)$ a zderivujeme podle t, dostaneme[25]

$$\tilde{x}_i(t) := \hat{x}_i(\tilde{q}_1(t), \ldots, \tilde{q}_s(t), t) \ \Rightarrow\ \dot{\tilde{x}}_i(t) = \dot{\tilde{q}}_j(t)\, \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}(\tilde{q}(t), t) + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}(\tilde{q}(t), t). \tag{109}$$

Odtud je vidět, že *hodnoty* časových *derivací* $\dot{\tilde{x}}_i(t)$ funkcí $\tilde{x}_i(t)$, jejichž hodnoty leží na varietě dané vazbami, je možno vyjádřit jako funkce $\hat{v}_i \equiv \dot{\hat{x}}_i$ zobecněných souřadnic q_j a *dalších s nezávislých proměnných* označených $\dot{q}_j$ nazývaných **zobecněné rychlosti** způsobem

$$\hat{v}_i = \dot{\hat{x}}_i(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t) := \dot{q}_j\, \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}(q, t) + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}(q, t),\ i = 1, \ldots, 3N. \tag{110}$$

Jak vidno, $\dot{\hat{x}}_i$ je lineární funkcí $\dot{q}_j$, takže z definice (110) okamžitě plyne "pravidlo o krácení teček"

$$\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}. \tag{111}$$

Cvičení 39 *Ověřte, že z (106) a (110) plyne $\frac{d}{dt}\hat{x}_i(\tilde{q}(t), t) = \dot{\hat{x}}_i(\tilde{q}(t), \frac{d}{dt}\tilde{q}(t), t)$.*

[25]Všimněte si tří různých významů výrazů s x_i: Jednak jsou to nezávislé proměnné funkce L ležící v $\mathbf{R}^{3N}$, jednak představují funkce s zobecněných souřadnic a času a jsou označeny $\hat{x}_i$ a při označení $\tilde{x}_i$ představují funkce jedné proměnné – času, t.j. křivku v $\mathbf{R}^{3N}$. Tedy $x_i, \hat{x}_i, \tilde{x}_i$ pokaždé představují jinou matematickou veličinu!!!

Cvičení 40 *Dva body spojené nehmotnou tyčkou měnící se délky: Holonomní rheonomní vazba má tedy tvar* $f = f(\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, t) = (\vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)})^2 - l(t)^2 = 0$*, kde* l *je předem zadaná funkce času. Zobecněné souřadnice* q_k *jsou pak například* $(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi)$ *a funkce (106) jsou* $\hat{\vec{x}}_{(1)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi, t) := \vec{y} + \vec{r}$*,* $\hat{\vec{x}}_{(2)}(y_1, y_2, y_3, \theta, \varphi, t) := \vec{y} - \vec{r}$*, kde*

$$\vec{y} := (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{r} := \frac{1}{2} l(t) \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right).$$

Spočítejte rychlosti $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ *pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí. Ověřte pravidlo o krácení teček.*

Cvičení 41 *Ukažte, že pro rheonomní holonomní vazby platí*

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_K}{\partial t} = 0, \quad K = 1, \ldots, p.$$

Naším cílem nyní je napsat **pohybové rovnice pro nové dynamické proměnné**, t.j. pro zobecněné souřadnice soustavy q_j jako funkce času $\tilde{q}_j(t)$. *Ukážeme, že zápis těchto rovnic vypadá formálně stejně jako Lagrangeova formulace pohybových rovnic* (94) pro kartézské souřadnice hmotných bodů bez vazeb.

Jak už bylo zmíněno na začátku této kapitoly, holonomní vazby je v Newtonovské mechanice nutno nahradit vazbovými silami, které nelze zahrnout do potenciálových sil, takže systém s vazbami je možno popsat pohybovými rovnicemi ve tvaru[26]

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) = F_i^{(v)}(\vec{X}, \vec{V}, t) + F_i^{(o)}(\vec{X}, \vec{V}, t), \tag{112}$$

kde $L(\vec{X}, \vec{V}) = T(\vec{V}) - U(\vec{X}, \vec{V}, t)$ a $F_i^{(v)}$ a $F_i^{(o)}$ jsou kartézské složky vazbových a vtištěných nepotenciálových sil, jejichž působení nelze zahrnout do Lagrangeovy funkce.

[26]Na rozdíl od operátoru derivace funkce jedné proměnné $\frac{d}{dt}$, operátor "totální derivace" $\frac{\hat{d}}{dt}$ (stříška se často nekorektně vynechává) působí na funkce $2s+1$ proměnných $F = F(q_j, \dot{q}_j, t)$ ($q_j, \dot{q}_j, t$ jsou nezávislé proměnné!) a vytvoří funkce $3s+1$ proměnných $q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j, t$ způsobem

$$\frac{\hat{d}}{dt}F(q, \dot{q}, t) \equiv (\frac{\hat{d}}{dt}F)(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) := \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial q_j}(q_j, \dot{q}_j, t) + \ddot{q}_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Tato definice plyne z požadavku

$$\Big(\frac{\hat{d}}{dt}F(q, \dot{q}, t)\Big)\Big|_{q_j = \tilde{q}_j(t), \dot{q}_j = \dot{\tilde{q}}_j(t), \ddot{q}_j = \ddot{\tilde{q}}_j(t)} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t).$$

Naopak $\frac{\partial}{\partial t}F(q, \dot{q}, t)$ znamená parciální derivaci $F(q, \dot{q}, t)$ podle t.

Dosazením (106) a (110) do levé strany (112), vynásobením faktorem $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}$ a sečtením podle i dostaneme po úpravách (viz [1] Kap 2.3)

$$\sum_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} L(\vec{X}, \vec{V}, t) \right] = \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \hat{L}(q, \dot{q}, t). \tag{113}$$

Zde, jakož i při zmíněných úpravách, je nutno stále mít na paměti, že q_j i $\dot{q}_j, \ddot{q}_j$ jsou *nezávislé proměnné*, za které až po provedení derivací můžeme dosadit funkce času $\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t)$ a $\ddot{\tilde{q}}_j(t)$, což je formálně vyjádřeno stříškou nad $\frac{d}{dt}$. Lagrangeova funkce $\hat{L}$ na pravé straně (113) je definována způsobem

$$\hat{L}(q, \dot{q}, t) := L(\hat{\vec{X}}(q, t), \hat{\vec{V}}(q, \dot{q}, t), t) = \hat{T}(q, \dot{q}, t) - \hat{U}(q, \dot{q}, t), \tag{114}$$

kde $\hat{\vec{X}}(q, t)$ je zkrácený zápis transformace souřadnic (106) a $\hat{\vec{V}}(q, \dot{q}, t)$ je zkrácený zápis transformace rychlostí (110) takže

$$\hat{T}(q, \dot{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{\hat{x}}_i(q, \dot{q}, t) \dot{\hat{x}}_i(q, \dot{q}, t), \tag{115}$$

$$\hat{U}(q, \dot{q}, t) := U^{(k)}(\hat{x}_i(q, t), \dot{\hat{x}}_i(q, \dot{q}, t), t), \tag{116}$$

kde $U^{(k)}(x_i, v_i, t)$ je (zobecněná) potenciální energie v kartézských souřadnicích (případně rychlostech). Všimněte si, že díky (110) je *zobecněná kinetická energie* (115) polynomem druhého stupně ve zobecněných rychlostech $\dot{q}_j$ s koeficienty obecně *závislými na zobecněných souřadnicích a čase*

$$\hat{T}(q_j, \dot{q}_j, t) := \sum_{j,k=1}^{s} \gamma_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{s} \beta_j(q, t) \dot{q}_j + \alpha(q, t). \tag{117}$$

Cvičení 42 *Ověřte, že pro skleronomní vazby je $\hat{T}$ homogenní funkcí $\dot{q}_j$ stupně 2, t.j. $\beta_j = \alpha = 0$. Napište výraz pro γ_{jk}.*

Cvičení 43 *Ukažte, že Lagrangeova funkce matematického kyvadla délky l v $\mathbf{R}^3$ má v souřadnicích sféry $q_1 = \vartheta, q_2 = \phi$ tvar*

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \; \dot{\phi}^2) - mgl \cos \vartheta. \tag{118}$$

5.2.2 Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Podobným způsobem jako v předchozím paragrafu, t.j. zápisem v zobecněných souřadnicích a rychlostech, je třeba upravit i pravou stranu rovnice (112). Výhodou a smyslem Lagrangeovy formulace mechaniky je, že přechodem k zobecněným souřadnicím, které zaručují splnění holonomních vazeb se zbavíme vazbových sil.Soustava holonomních vazeb (105) definuje v každém čase nadplochu dimenze s v $\mathbf{R}^{3N}$. Uvažujme-li infinitesimální změny souřadnic $\delta\vec{X}$ v bodě $\vec{X}$ pak

$$f_K(\vec{X}+\vec{\delta}X,t) = f_K(\vec{X},t) + \frac{\partial f_K}{\partial x_i}\delta x_i + O(\delta X^2).$$

Pokud tyto změny se dějí v souhlasu s vazbami v daném čase, t.j. $f_K(\vec{X}+\delta\vec{X},t)=0$, znamená to, že vektory $\delta\vec{X}$ jsou *tečné k nadploše definované vazbami.* Pro infinitesimální změny souřadnic, které se dějí v souhlasu s vazbami pak dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X},t)\,\delta x_i = 0, \tag{119}$$

což znamená, že gradienty funkcí f_K jsou kolmé na vektory $\delta\vec{X}$.

Nadále budeme předpokládat, že vazby jsou tak zvaně *ideální*, což znamená že vazbové síly $F_K^{(v)}$ nekonají při pohybu mechanickou práci.[27] Pro ideální vazby tedy platí

$$\vec{F}_K^{(v)}(\vec{X},t)\cdot\delta\vec{X}(t) = 0 \tag{120}$$

pro všechna $\vec{X}$, která splňují vazbové podmínky.

Vazbové síly ideálních vazeb tedy v každém čase musí být kolmé na nadplochu, po které se soustava hmotných bodů může pohybovat a je možné je v každém čase vyjádřit jako lineární kombinaci gradientů funkcí f_K

$$F_i^{(v)}(\vec{X},t) = \sum_{K=1}^{p} \lambda_K(t)\frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X},t). \tag{121}$$

Koeficienty λ_K pak závisí na konkrétním řešení pohybových rovnic.

Pokud vazbové síly jsou dány tímto vztahem, pak holonomní vazby jsou ideální pro skleronomní i rheonomní případ. Určení skutečné ideálnosti vazeb je poměrně obtížné, neboť musíme znát i odpovídající vazbové síly.

Vynásobíme-li pravou stranu rovnice (112) opět faktorem $\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}$ a sečteme podle i, příspěvek vazbových sil zmizí, neboť

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N}\sum_{K=1}^{p}\lambda_K\frac{\partial f_K}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{K=1}^{p}\lambda_K\frac{\partial\hat{f}_K}{\partial q_j} = 0 \tag{122}$$

[27] Předpokládáme například, že vazba funguje bez tření.

díky (108). Z rovnic (112) a (113) tak dostaneme tzv. *Lagrangeovy rovnice druhého druhu*[28]

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\hat{L}(q,\dot{q},t)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\hat{L}(q,\dot{q},t)=\hat{F}_j^{(o)}(q,\dot{q},t):=\sum_{i=1}^{3N}F_i^{(o)}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}, \quad (123)$$

kde na pravé straně jsou tzv. *zobecněné ostatní síly*, což jsou vtištěné síly, jejichž vliv se nepodařilo zahrnout do Lagrangeovy funkce. Po dosazení funkcí času $\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), \ddot{\tilde{q}}_j(t)$ za proměnné $q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j$ jsou tyto rovnice, podobně jako rovnice Newtonovy, diferenciálními rovnicemi druhého řádu pro $\tilde{q}_j(t)$. Neobsahují však vazbové síly. Jejich tvar je je invariantní vůči záměně zobecněných souřadnic:

Cvičení 44 *Ukažte že tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu se nezmění při přechodu k jiným zobecněným souřadnicím, t.j. pokud platí (123) a* $q_j = \hat{q}_j(q'_1,\ldots,q'_s,t)$*, pak platí (123), kde* $q \mapsto q'$, $\dot{q} \mapsto \dot{q}'$,

Mimo to se tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu nezmění pokud se Lagrangeova funkce změní o totální derivaci funkce souřadnic a času, t.j. pokud

$$\hat{L}'(q,\dot{q},t)=\hat{L}(q,\dot{q},t)+\frac{\hat{d}}{dt}g(q,t). \quad (124)$$

Cvičení 45 *Ukažte, že pokud* $G(q,\dot{q},t)=\frac{\hat{d}}{dt}g(q,t)$*, pak*

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}G(q,\dot{q},t)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}G(q,\dot{q},t)=0.$$

Známe-li Lagrangeovu funkci[29] $L(q,\dot{q},t)$ mechanické soustavy, můžeme definovat zobecnění některých fyzikálních veličin, které se váže na popis soustavy nikoliv v kartézských, nýbrž zobecněných souřadnicích. Nejdůležitější jsou tzv. *kanonické hybnosti*

$$p_j=p_j(q,\dot{q},t):=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q},t), \quad (125)$$

které se používají k definici Hamiltonovy funkce (viz TEF2, [1]), jež se užívá k alternativní formulaci pohybových rovnic mechanických soustav.

Další zobecněnou veličinou je *zobecněná energie*

$$E=E(q,\dot{q},t):=\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q},t)-L(q,\dot{q},t). \quad (126)$$

---

[28]Lagrangeovy rovnice prvního druhu odvodíme paradoxně později v podkapitole 6.1.4.

[29]V dalším textu budeme stříšku nad L vynechávat

Přestože lze definovat i pojem zobecněné kinetické a potenciální energie způsobem (115), (116), zobecněná energie není obecně součtem zobecněné kinetické a potenciální energie (viz [1], kap.2.5). Pro skleronomní vazby (kdy kinetická energie je homogenní funkcí $\dot{q}_j$ stupně 2) a pro potenciály nezávislé na rychlostech $U^{(k)} = U^{(k)}(x_i, t)$ (viz např. cvičení 43), však ano.

Poznamenejme, že fyzikální veličiny jako kanonická hybnost, kinetická energie, zobecněná energie atd. jsou v pojetí Lagrangeovy mechaniky *funkce na rozšířeném konfiguračním prostoru* se souřadnicemi $q_j, \dot{q}_j$ závisející případně ještě na čase. Vzhledem k tomu, že zobecněné souřadnice nemusí mít vždy rozměr délky (viz např. cvičení 40), zobecněná hybnost nemusí mít fyzikální rozměr kartézské hybnosti mv_i (viz např. cvičení 48).

Cvičení 46 *Jak se změní zobecněná hybnost a zobecněná energie při změně Lagrangeovy funkce (124)*

5.3 * Disipativní síly, Rayleighova funkce

Příkladem sil, které nelze zahrnout do Lagrangeovy funkce jsou síly disipativní, kterými působí prostředí proti pohybu mechanického systému (odpor vzduchu, odpor vody, ...). Ty závisí na rychlostech a aproximují se obvykle polynomem. Nejjednodušší aproximace je $\vec{F}^{(d)} = -k\vec{v}$, kterou je možno získat ze skalární *Rayleighovy funkce*

$$R = R(\vec{v}) = \frac{1}{2}k\,v^2 \tag{127}$$

jako

$$F_i^{(d)} = -\frac{\partial R}{\partial v_i}. \tag{128}$$

Lagrangeovy rovnice zahrnující síly disipativní v obecných souřadnicích pak mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L(q,\dot{q},t)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}L(q,\dot{q},t) &= -\frac{\partial R}{\partial v_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial R}{\partial v_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}R(\dot{\hat{x}}_i(q,\dot{q})) = \hat{F}_j^{(o)}(q,\dot{q}).\end{aligned}$$

5.4 Zákony zachování, cyklické souřadnice, Věta Noetherové

Přestože řešení pohybových rovnic jsou obvykle netriviální funkce času, je možné v mnoha fyzikálně zajímavých případech nalézt *funkce zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí a času* $F(q_j, \dot{q}_j, t)$ (tedy $2s+1$ proměnných), takové, že po dosazení řešení Lagrangeových rovnic druhého druhu a jejich derivací $q_j \mapsto \tilde{q}_j(t)$, $\dot{q}_j \mapsto \dot{\tilde{q}}_j(t)$ jsou hodnoty složených funkcí $\mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) := F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t)$ na čase nezávislé. Tedy

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) = \frac{d}{dt}F(\tilde{q}_j(t), \dot{\tilde{q}}_j(t), t) = (\frac{\hat{d}}{dt}F(q, \dot{q}, t))\Big|_{q=\tilde{q}(t), \dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} =$$
$$= \Big(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}\Big)\Big|_{q=\tilde{q}(t), \dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t), \ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} = 0 \tag{129}$$

pro libovolné řešení $\tilde{q}_j(t)$ Lagrangeových rovnic druhého druhu. Takovým funkcím F říkáme **zachovávající se veličiny**, neboť jejich hodnoty se zachovávají během pohybu, nebo také první integrály pohybových rovnic, **integrály pohybu**. Zdůrazněme ještě jednou, že integrály pohybu jsou, podobně jako Lagrangeova funkce, funkcemi na rozšířeném konfiguračním prostoru a čase.

Je zřejmé, že splnění podmínky (129) a tedy i tvar funkce F bude záviset na konkrétním tvaru pohybových rovnic tedy Lagrangeovy funkce L. Neznamená to však, že hodnota $\mathcal{F}_{\tilde{q}}$, tedy hodnota integrálu pohybu pro dané řešení, je dána pohybovou rovnicí. Pro různá řešení pohybových rovnic $\tilde{q}$ může hodnota $\mathcal{F}_{\tilde{q}}$ nabývat různých hodnot daných počátečními podmínkami řešení $\tilde{q}$, neboť z rovnice (129) plyne

$$\mathcal{F}_{\tilde{q}}(t) = \mathcal{F}_{\tilde{q}}(t_0) = F(\tilde{q}_j(t_0), \dot{\tilde{q}}_j(t_0), t_0).$$

Zachovávající se veličiny jsou důležitým nástrojem pro řešení pohybových rovnic. Přesvědčit se, že nějaká funkce $F(q, \dot{q}, t)$ je integrálem pohybu je poměrně snadné. Stačí vyjádřit proměnné $\ddot{q}_j$ z Lagrangeových rovnic druhého druhu (123) jako funkce $q, \dot{q}, t$

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}, t), \tag{130}$$

a dosadit je do $(\frac{\hat{d}}{dt}F)(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. Pokud F je integrál pohybu pak výsledek dá nulu pro libovolné $q, \dot{q}, t$.

$$\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}G_j(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0. \tag{131}$$

Všimněte si, že pro ověření faktu, že funkce F je integrál pohybu, neřešíme Lagrangeovy rovnice druhého druhu (123) jako diferenciální rovnice pro $\tilde{q}_j(t)$, nýbrž jako soustavu algebraických rovnic pro $\ddot{q}_j$, což je mnohem jednodušší úloha. Hledání takovýchto funkcí F však může být složitý problém a je proto předmětem různých metod.

Nejsnadněji se integrály pohybu hledají, pokud některá ze zobecněných souřadnic q_j je tzv. *cyklická*, což znamená, že se (na rozdíl od $\dot{q}_j$) nevyskytuje v Lagrangeově funkci. Pokud všechny síly mechanického systému lze zahrnout do Lagrangeovy funkce, t.j. pravá strana (123) je nulová, a některá zobecněná souřadnice je cyklická, pak dostáváme

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L(q, \dot{q}, t)\right) = 0,$$

takže v tom případě

$$F(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \tag{132}$$

je první integrál Lagrangeových rovnic druhého druhu daných Lagrangeovou funkcí L.

Příklad 5.1 *Lagrangeova funkce pro hmotný bod v homogenním gravitačním poli je*

$$L = L(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{2} m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + mgx_3. \tag{133}$$

Cyklické souřadnice jsou x_1, x_2. Zachovávající se veličiny jsou $F_1 := mv_1,\ F_2 := mv_2$, což jsou hybnosti ve směru kolmém na směr gravitační síly.

Neznamená to však, že pomocí těchto cyklických souřadnic jsme našli všechny zachovávající se veličiny.

Cvičení 47 *Ukažte, že třetí složka momentu hybnosti $L_3 = x_1 v_2 - x_2 v_1$ je rovněž zachovávající se veličina pro hmotný bod v homogenním gravitačním poli.*

Cvičení 48 *Přepište Lagrangeovu funkci (133) do cylindrických souřadnic a nalezněte cyklickou souřadnici a zachovávající se veličinu. Ukažte, že to je třetí složka momentu hybnosti zapsaná v cylindrických souřadnicích*

Cvičení 49 *Ukažte, že pokud Lagrangeova funkce nezávisí na čase (izolovaná soustava), zobecněná energie (126) je integrálem pohybu.*

Nezávislost Lagrangeovy funkce na zobecněné souřadnici q_j nazýváme *homogenitou konfiguračního prostoru v q_j*. Je-li tato zobecněná souřadnice úhel, nazýváme tuto homogenitu isotropií (viz cvičení 48).

Příklad 5.2 *"Fyzikální" prostor ve kterém působí pouze konstantní vertikální síla je homogenní v x_1 a x_2 (a není homogenní v x_3!).*

Příklad 5.3 *"Fyzikální" prostor ve kterém působí pouze isotropní síla $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} f(r) = -\mathrm{grad}\, U(r)$ je homogenní ve sférické souřadnici ϕ (a není homogenní v r a ϑ !).*

Existence cyklických souřadnic a jim odpovídajících integrálů pohybu souvisí s (obecnější) větou Noetherové:

Věta 5.1 *Nechť pravé strany Lagrangeových rovnic druhého druhu jsou nulové, t.j. $Q_j^{(o)} = 0,\ j = 1, \ldots, s$. Pak ke každé* **grupě** *transformací souřadnic $q_j \mapsto q'_j = \phi_j(q, \alpha)$ závisejících spojitě na parametru $\alpha \in \mathbf{R}$, které ponechávají* **Lagrangeovu**

funkci nezměněnu *(invariantní), existuje nekonstantni první integrál pohybových rovnic*

$$F(q,\dot q,t)=\sum_{j=1}^{s}Y_j(q)\frac{\partial}{\partial\dot q_j}L(q,\dot q,t), \tag{134}$$

kde $Y_j(q)$ jsou složky vektorového pole generující příslušnou jednoparametrickou grupu transformací způsobem

$$Y_j(q):=\frac{\partial\phi_j(q,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}. \tag{135}$$

Tyto složky splňují parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}Y_j+\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\dot q_k\right]=0. \tag{136}$$

Otázka: Jaké podmínky pro funkce $\phi_j(q,\alpha)$ plynou z předpokladu, že transformace tvoří (jednoparametrickou) grupu?

Důkaz věty Noetherové: Při infinitesimální transformaci přejde q_j na

$$q'_j=\phi_j(q,\varepsilon)=q_j+\varepsilon\frac{\partial\phi_j}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2)=:q_j+\varepsilon Y_j(q)+O(\varepsilon^2) \tag{137}$$

a

$$\dot q_j\mapsto\dot q'_j=(\frac{\hat d}{dt}\phi_j)(q,\dot q,\varepsilon)\overset{137}{=}\dot q_j+\varepsilon\dot Y_j(q,\dot q)+O(\varepsilon^2),$$

kde

$$\dot Y_j(q,\dot q):=(\frac{\hat d}{dt}Y_j)=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}(q)\,\dot q_k.$$

Lagrangeova funkce se změní o

$$\delta L=L(q',\dot q',t)-L(q,\dot q,t)=\varepsilon\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}Y_j+\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\dot q_k\right)\right]+O(\varepsilon^2).$$

Z invariance Lagrangeovy funkce $\delta L=0$ pak plyne (136). Nyní už je snadné se přesvědčit že funkce (134) je *integrál pohybu odpovídající jednoparametrické grupě* určené polem $\vec Y(q)$, tedy že splňuje (129):

$$\frac{\hat d}{dt}F(q,\dot q,t)\overset{134}{=}\sum_{j=1}^{s}[(\frac{\hat d}{dt}Y_j)\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}+Y_j\frac{\hat d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j})]=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\Big[\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\dot q_k\right)\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}+Y_j\frac{\hat d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j})\Big]\overset{136}{=}\sum_{j=1}^{s}[-\frac{\partial L}{\partial q_j}Y_j+Y_j\frac{\hat d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot q_j})].$$

Pro funkce $\tilde{q}(t)$ splňující Lagrangeovy rovnice druhého druhu (123), kde $Q_j^{(o)} = 0$, pak dostáváme

$$\left(\frac{\hat{d}}{dt}F(q,\dot{q},t)\right)\Big|_{q=\tilde{q}(t),\dot{q}=\dot{\tilde{q}}(t),\ddot{q}=\ddot{\tilde{q}}(t)} = 0.$$

Q.E.D.

Pokud známe nějakou cyklickou souřadnici q_i, pak je zřejmé, co se myslí onou grupou transformací. Jsou to transformace, které pro $j \neq i$ ponechávají zobecněné souřadnice nezměněny $q'_j = \phi_j(q,\alpha) := q_j$ a

$$q'_i = \phi_i(q,\alpha) := q_i + \alpha,\ \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Nalézt ale všechny (nezávislé) grupy transformací, které ponechávají danou Lagrangeovu funkci invariantní je často nesnadný úkol. Lze postupovat ve dvou krocích. V prvním hledat tzv. infinitesimální transformace – vektorová pole $\vec{Y}(q) = (Y_1(q), \ldots, Y_s(q))$, t.j. řešit rovnice (136), a poté hledat jednoparametrickou grupu transformací, t.j. funkce $\phi_j(q,\varepsilon)$ pro které platí (135).

Otázka: *Jak vypadá vektorové pole $\vec{Y}(q)$ pro cyklickou souřadnici q_j?*

Cvičení 50 *Nechť Lagrangeova funkce má tvar*

$$L = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - U\left((x_1^2 + x_2^2), x_3\right),$$

kde U je libovolná diferencovatelná funkce. Ukažte, že $\vec{Y}(\vec{x})) = (-x^2, x^1, 0)$ splňuje (136). Napište odpovídající zachovávající se veličinu.

Nalezení vektorových polí $\vec{Y}(q)$, která splňují (136) však obecně rovněž není jednoduché. Pomoci může hledání grup symetrií pohybových rovnic (přednáška DRG), avšak grupa symetrie pohybových rovnic nemusí být vždy grupou symetrie Lagrangeovy rovnice:

Cvičení 51 *Nechť Lagrangeova funkce má tvar (volný hmotný bod na přímce)*

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

Ukažte, že pohybové rovnice jsou invariantní vůči "škálování" $q \mapsto q\,e^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, zatímco Lagrangeova funkce nikoliv. Jak vypadá vektorové pole Y pro tuto grupu transformací? Je $F(q,\dot{q},t)$ dané vztahem (134) integrálem pohybu?

6 Základní principy mechaniky

Jak už bylo několikrát řečeno, základem mechaniky jsou Newtonovy zákony. Jejich tvar není dán nějakými logickými úvahami, nýbrž přírodou a o jejich platnosti je nutno se přesvědčit experimentálním ověřováním. Nicméně je možné uvažovat o jiné, matematicky ekvivalentní formulaci přírodních zákonů, která by byla stručnější a/nebo by pracovala s jinými pojmy než je zrychlení a síla a která by případně nabízela zobecnění i do jiných oblastí fyziky. Tyto formulace se často nazývají principy, protože neplynou z nějakých obecnějších úvah, nýbrž jsou možným matematickým vyjádřením základů mechaniky.

6.1 Diferenciální principy

6.1.1 Statická rovnováha v soustavě bez vazeb, princip virtuální práce

V této kapitole ukážeme, že systém hmotných bodů s kartézskými souřadnicemi $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_{3N})$ v inerciální soustavě je ve statické rovnováze, pokud tzv. virtuální práce sil v tomto bodě je nulová.

Řekneme, že systém je ve statické rovnováze, pokud se jeho souřadnice v čase nemění, t.j.

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) =: \vec{X}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,3N}) \ \forall t, \tag{138}$$

z čehož automaticky plyne $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{0}$.

Nechť zatím v soustavě nepůsobí žádné vazby, nýbrž pouze vtištěné síly $\vec{F} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{V})$. Pak z druhého Newtonova zákona pro systém v rovnováze plyne

$$F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) = 0, \ i = 1, \ldots, 3N. \tag{139}$$

Naopak, pokud platí (139) a $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$, $\dot{\vec{X}}(t_0) = 0$, pak lze snadno ukázat (viz [1], Kap. 4.2.1), že[30] pak $\vec{X}(t) = \vec{X}_0$. Řešením algebraických rovnic (139) tedy dostaneme rovnovážné stavy soustavy $\vec{X}_0$. Odtud je zřejmé, že tzv. *virtuální práce*

$$\delta A(\vec{X}) := \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}, \vec{0}) \, \delta x_i, \tag{140}$$

kterou by systém N hmotných bodů vykonal při infinitesimálně malém posunutí celé soustavy $\delta\vec{X}$ v libovolném směru z bodu statické rovnováhy $\vec{X}_0$ je nulová

$$\delta A(\vec{X}_0) = 0. \tag{141}$$

[30] pokud všechny derivace F_i podle x_j budou v bodě $(\vec{X}_0, \vec{0})$ konečné

Na druhé straně, vzhledem k tomu, že v soustavě nepůsobí žádné vazby, jsou směry posunutí $\delta\vec{X}$ libovolné a nulovost virtuální práce v bodě rovnováhy je ekvivalentní nulovosti síly v tomto bodě.

$$\delta A(\vec{X}_0) = 0 \ \Leftrightarrow F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) = 0, \ i = 1, \ldots, 3N.$$

6.1.2 Statická rovnováha soustavy hmotných bodů se skleronomními holonomními vazbami

Co se změní, pokud v systému působí skleronomní holonomní vazby

$$f_K(\vec{X}) = 0, \ K = 1, \ldots, p. \tag{142}$$

Jednak se na pravé straně Newtonova zákona, a tím pádem i na levé straně (139) a na pravé straně (140), objeví a priori neurčené vazbové síly $\vec{F}^{(v)}$ a jednak při výpočtu práce (140) nemůžeme uvažovat libovolná posunutí $\delta\vec{X}$, nýbrž pouze taková, která jsou ve shodě s vazbami. Ukážeme, že tyto dvě modifikace použité současně nezmění tvar podmínky (141) pro statickou rovnováhu soustavy v tom smyslu, že na pravé straně se neobjeví vazbové síly. Neplyne ale odtud $F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) = 0$, neboť posunutí δx_i nejsou nezávislá.

Vazbové síly pro holonomní vazby jsou kolmé na nadplochu danou vazbami (viz (121))

$$F_i^{(v)}(\vec{X}) = \sum_{K=1}^{p} \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}), \tag{143}$$

takže statická rovnováha soustavy hmotných bodů se skleronomními holonomními vazbami je určena soustavou $3N + p$ algebraických rovnic

$$F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) + F_i^{(v)}(\vec{X}_0) = F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) + \sum_{K=1}^{p} \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}_0) = 0, \ i = 1, \ldots, 3N, \tag{144}$$

$$f_K(\vec{X}_0) = 0, \ K = 1, \ldots, p. \tag{145}$$

pro $3N + p$ neznámých $(x_{0,1}, \ldots, x_{0,3N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Pro virtuální posunutí δx_i, která se dějí v souhlasu s vazbami (142) a splňují tedy (viz kapitola 5.2.2)

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}) \delta x_i = 0, \tag{146}$$

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)}(\vec{X}) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{K=1}^{p} \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}) \delta x_i = 0, \tag{147}$$

takže vazbové síly k virtuální práci (140) nepřispějí. V bodě statické rovnováhy systému se skleronomními holonomními vazbami pak díky (147) a (144) platí **princip virtuální práce**

$$\delta A(\vec{X}_0) := \sum_{i=1}^{3N} \left(F_i(\vec{X}_0, \vec{0}) + F_i^{(v)}(\vec{X}_0) \right) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i(\vec{X}_0, \vec{0})\, \delta x_i = 0, \qquad (148)$$

kde δx_i splňují (146). Tedy *virtuální práce, kterou by systém vykonal při posunutí ze statické rovnováhy při zachování skleronomních holonomních vazbových podmínek je nulová.* Tento princip je možno rozšířit i na tzv. ideální vazby závislé na čase.

6.1.3 * Rheonomní holonomní vazby, virtuální posunutí, ideální vazby

Pro vazbové podmínky závislé na čase je důležité, zda budeme uvažovat infinitesimální posunutí souřadnic, která se dějí v souhlasu *s měnícími* se vazbami v běžícím čase nebo okamžitě (vazby jsou "zamrzlé v čase"). První posunutí můžeme nazývat reálná, zatímco druhá budeme nazývat *virtuální*. Je zřejmé, že pro skleronomní vazby tyto pojmy splývají. Pro příklad ze cvičení 40 musíme například uvažovat posunutí, která splňují vazbu $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - l(t)^2 = 0$. Reálná posunutí splňují rovnici

$$2\delta\vec{x}_1(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - 2\delta\vec{x}_2(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - 2l(t)l'(t)\, dt = 0,$$

zatímco pro virtuální posunutí poslední člen na levé straně chybí.

Virtuální posunutí soustavy splňující v čase t holonomní podmínky $f_K(\vec{X}, t) = 0$ tedy splňují podmínky

$$\begin{aligned} f_K(\vec{X} + \delta\vec{\vec{X}}(t), t) &= f_K(\vec{X}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t)\delta x_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t)\delta x_i(t) = 0, \quad K = 1, \dots, p, \end{aligned} \qquad (149)$$

což je soustava lineárních homogenních rovnic pro $\delta x_i(t)$.

Reálná posunutí soustavy $\delta' x_i(t) =: v_i(t) dt$ však splňují v čase $t + dt$ holonomní podmínky

$$\begin{aligned} f_K(\vec{X} + \delta'\vec{\vec{X}}(t), t + dt) &= f_K(\vec{X}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t)\delta' x_i(t) + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) dt = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) v_i(t) + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) \right) dt = 0, \end{aligned}$$

takže podmínky pro reálné posunutí jsou

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X}, t) v_i(t) + \frac{\partial f_K}{\partial t}(\vec{X}, t) = 0, \quad K = 1, \dots, p, \tag{150}$$

což je soustava lineárních nehomogenních rovnic pro $v_i(t)$.

Cvičení 52 *Odvoďte podmínky pro reálná a virtuální posunutí pro hmotný bod pohybující se po trojosém elipsoidu, jehož osy jsou závislé na čase*

Virtuální práce je nyní taková práce, kterou by systém N hmotných bodů vykonal při virtuálním posunutí jejich poloh, to jest při splnění vazbových podmínek *v daném čase* (149) a je tedy definována způsobem

$$\delta A(\vec{X}, \vec{V}, t) := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha(\vec{X}, \vec{V}, t) \cdot \delta \vec{x}_\alpha(t), \tag{151}$$

kde $\vec{F}_\alpha$ jsou všechny síly působící na bod b_α, vazbové i nevazbové a $\delta \vec{x}_\alpha(t)$ jsou virtuální posunutí souřadnic bodu b_α v čase t splňující (149).

Máme-li definovány vazbové síly, můžeme určit *ideální vazby*, což jsou ty, pro které virtuální práce vazbových sil je nulová. Pro ideální vazby tedy platí

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{(v)}(\vec{X}, \vec{V}, t) \cdot \delta \vec{x}_\alpha(t) = 0 \tag{152}$$

pro všechna $\vec{X}, \vec{V}$ a t, která splňují vazbové podmínky

$$f_A(\vec{X}, \vec{V}, t) = 0, \ A = 1, \dots, P. \tag{153}$$

Podmínkou statické rovnováhy je pak

$$\delta A(\vec{X}_0, \vec{0}, t) = 0. \tag{154}$$

Za ideální vazby je možno považovat například i skleronomní neholonomní vazby lineární v rychlostech[31]

[31] Podmínky (155) jsou analogem podmínek pro rychlosti

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_K}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0$$

plynoucí z holonomních vazeb.

$$f_L(\vec{X},\vec{V}) := \sum_{i=1}^{3N} a_{Li}(\vec{X}) v_i = 0, \quad L = 1,\ldots,r, \tag{155}$$

pro vazbové síly

$$F_i^{(v)} = \sum_{L=1}^{r} \mu_L a_{Li}(\vec{X}), \tag{156}$$

přestože a_{Li} obecně nelze zapsat jako $\frac{\partial f_L}{\partial x_i}$, t.j. vazby nejsou skrytě holonomní. Vzhledem k tomu, že pro a_{Li} nezávislé na čase lze ztotožnit směry rychlostí v daném čase se směry virtuálních posunutí, lze snadno ověřit, že neholonomní vazby (155) jsou ideální.

6.1.4 Dynamická rovnováha, d'Alembertův princip

Princip virtuální práce lze použít i na nerovnovážné, v čase se vyvíjející stavy mechanických soustav, tedy na jejich časový vývoj tím, že jej uplatníme v každém okamžiku pohybu. Kartézské souřadnice bodů soustavy s vazbami splňují během pohybu rovnice

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{X},\dot{\vec{X}},t) + F_i^{(v)}(\vec{X},\dot{\vec{X}},t), \tag{157}$$

kde F_i jsou složky vtištěných a $F_i^{(v)}$ složky vazbových sil. V případě (ideálních[32]) holonomních vazeb dostáváme tzv. **Lagrangeovy rovnice prvního druhu**

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{X},\dot{\vec{X}},t) + \sum_{K=1}^{p} \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X},t), \tag{158}$$

které spolu s holonomními vazbovými podmínkami (105) představují soustavu $3N+p$ *algebraicko–diferenciálních* rovnic pro $3N+p$ *funkcí* času $\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{3N},\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_p$.

Z těchto rovnic je možné odvodit tzv. d'Alembertův princip. Podobně jako v případě statické rovnováhy lze definovat virtuální práci **efektivních sil** $F_{eff} := F_i(\vec{X},\dot{\vec{X}},t) - m_i\ddot{x}_i$, způsobem

$$\delta A_{eff}(\vec{X},\dot{\vec{X}},\ddot{\vec{X}},t) := \sum_{i=1}^{3N} \left[F_i(\vec{X},\dot{\vec{X}},t) - m_i \ddot{x}_i \right] \delta x_i(t) \tag{159}$$

a z Lagrangeových rovnic prvního druhu dostáváme **d'Alembertův princip**

$$\delta A_{eff}(\vec{\tilde{X}}(t)) = 0, \tag{160}$$

[32]Viz kapitolu 6.1.3

který v analogii se statickou rovnováhou vtištěných sil říká, že *pohyb soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil, neboli virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku pohybu nulová.*

Tento princip stejně jako princip virtuální práce je důležitý tím, že pro ideální vazby neobsahuje a priori neznámé vazbové síly. Lze jej považovat za základ klasické mechaniky přesto, že *pro soustavy s vazbami* z něj nelze odvodit Newtonovy pohybové rovnice (157), neboť virtuální posunutí nejsou lineárně nezávislá. Nicméně, pro holonomní vazby z něj lze odvodit Lagrangeovy rovnice druhého druhu přechodem k zobecněným souřadnicím praticky stejným postupem jaký jsme použili v kapitole 5.

Zapíšeme li totiž virtuální posunutí kartézských souřadnic pomocí zobecněných

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

pak (automaticky sčítáme přes $i = 1, \ldots, 3N,\ j = 1, \ldots, s$)

$$m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \frac{\hat{d}}{dt} (\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$\left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \tag{161}$$

$$F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j =: Q_j \delta q_j. \tag{162}$$

Zobecněnou sílu Q je možno rozdělit na potenciálovou a nepotenciálovou

$$Q_j = \left[\frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \right] + Q_j^o$$

a dosadíme-li (161) a (162) do d'Alembertova principu (160) dostaneme pro $L = \hat{T} - \hat{U}$

$$\left[Q_j^o - \frac{\hat{d}}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \tag{163}$$

z čehož díky nezávislosti zobecněných proměnných q_j plynou Lagrangeovy rovnice druhého druhu (123).

6.2 Integrální principy

V této podkapitole předvedeme, že řešení pohybových rovnic, t.j. funkce[33] $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_s(t))$, lze obdržet jako stacionární body jistých funkcionálů.

Nechť je dána množina funkcí $q : [t_1, t_2] \to \Omega \subset \mathbf{R}^s$ splňujících jisté vlastnosti, které definují množinu C. Funkcionálem S pak nazveme zobrazení

$$S : C \to \mathbf{R}, \quad q \mapsto S[q]$$

a můžeme řešit problém, pro jaké funkce q z množiny C nabývá funkcionál S minima, maxima nebo aspoň jaké q jsou stacionárními "body" S.

Nechť $q'(t) = q(t) + \delta q(t) = q(t) + \epsilon\, h(t)$. Funkce $q(t) \in C$ je *stacionárním bodem funkcionálu* S, pokud splňuje

$$S[q'] - S[q] = O(\epsilon^2), \ \forall q' \in C, \tag{164}$$

t.j. lineární přírůstek δS funkcionálu S je pro stacionární funkce nulový.

Přírůstku δq funkce q se říká variace funkce a k nalezení stacionární funkce funkcionálu slouží tzv. variační počet, který je obdobou diferenciálního počtu používaného pro hledání stacionárních bodů funkcí.

6.2.1 Hamiltonův princip

Jeden z nejčastěji užívaných a nejužitečnějších integrálních principů mechaniky, kterým lze nahradit Newtonovy rovnice *pro potenciálové nebo zobecněné potenciálové síly a holonomní vazby* je Hamiltonův princip, který říká, že **funkce $q(t)$, která minimalizuje, nebo aspoň stacionarizuje integrál z Lagrangeovy funkce podle času**

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{165}$$

nazývaný *akce*, **splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu a popisuje časový vývoj soustavy z bodu Q_1 v čase t_1 do bodu Q_2 v čase t_2.**

Abychom Hamiltonův princip formulovali přesně, *je třeba specifikovat množinu funkcí C*, pro které je funkcionál akce definován. Jinými slovy, je třeba definovat množinu drah, které uvažujeme. Pro Hamiltonův princip je

$$C := \{q : [t_1, t_2] \to \Omega \subset \mathbf{R}^s, \ q_j, \dot{q}_j \text{ spojité}, \ q(t_1) = Q_1, q(t_2) = Q_2\} = C(Q_1, Q_2, t_1, t_2). \tag{166}$$

Naše úloha tedy zní: Máme dva body konfiguračního prostoru Q_1, Q_2 a zajímá nás po jaké dráze $q(t)$ v konfiguračním prostoru parametrizované časem se mechanický

[33] V této podkapitole upouštíme od označování funkcí $q(t)$ vlnkou, neboť by to značně znepřehledňovalo zápis vzorců.

systém dostane z bodu Q_1 v čase t_1 do bodu Q_2 v čase t_2. Ukážeme, že funkce $q(t)$, která je stacionárním bodem akce a platí pro ni tedy $\delta S[q] = 0$, splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu, takže popisuje skutečný časový vývoj soustavy.

Dosaďme (165) do (164) a spočítejme členy lineární v $\delta q_j(t)$.

$$S[q'] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q'(t), \dot{q}'(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)]\, dt, \tag{167}$$

takže lineární přírůstek funkcionálu akce je

$$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_j}\,(q(t), \dot{q}(t), t)\ \delta q_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t)\, \delta \dot{q}_j(t)\, dt. \tag{168}$$

Integrací druhého členu per partes dostaneme

$$\begin{aligned} \delta S[q] \ &= \ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t)\, \delta q_j(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t), t)\right)\right]\ \delta q_j(t) dt. \end{aligned} \tag{169}$$

Vzhledem k tomu že q i q' leží v $C(Q_1, Q_2)$,

$$\delta q(t_1) = q'(t_1) - q(t_1) = Q_1 - Q_1 = 0$$

a podobně $\delta q(t_2) = 0$, první člen v (169) je nula. Z druhého členu a požadavku stacionárnosti $\delta S[q] = 0$ zjišťujeme, že funkce $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_s(t))$, která stacionarizuje funkcionál akce splňuje Lagrangeovy rovnice druhého druhu (123) s nulovou pravou stranou díky tzv. základnímu lemmatu variačního počtu (viz [1], dodatek D2):

Nechť $G(x)$ je spojitá a $\int_{x_1}^{x_2} G(x)h(x)dx = 0$ pro libovolnou h spojitou se spojitou první derivací, splňující $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Pak $G = 0$.

6.2.2 * Neisochronní variace, princip Maupertuisův

Variace $\delta q(t) := q'(t) - q(t)$ funkcí q, které používá Hamiltonův princip a pro které $q'(t_1) = Q_1$, $q'(t_2) = Q_2$ se nazývají *isochronní*. Tyto variace splňují $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

Je však možno formulovat i integrální principy, které používají *neisochronní* variace, pro které $q(t_1) = Q_1$, $q(t_2) = Q_2$, ale varírované funkce q' procházejí body Q_1, Q_2 v blíže neurčených časech $t_1(q') = t_1' = t_1 + \Delta t_1,\ t_2(q') = t_2' = t_2 + \Delta t_2$ obecně různých od t_1, t_2.

Vzhledem k tomu, že nás zajímají "malé" variace stacionárních funkcí (pro které $\Delta t_j = 0$), uvažujeme $\Delta t_j \sim \varepsilon$. V časech t_1, t_2 pak platí

$$\delta q(t_1) = -\dot{q}(t_1)\Delta t_1,\ \delta q(t_2) = -\dot{q}(t_2)\Delta t_2, \tag{170}$$

neboť

$$q'(t_1) = q'(t'_1 - \Delta t_1)) = q'(t'_1) - \dot{q}'(t'_1)\Delta t_1 + O(\varepsilon^2) = Q_1 - \dot{q}'(t_1)\Delta t_1 + O(\varepsilon^2)$$
$$= q(t_1) - \dot{q}(t_1)\Delta t_1 + O(\varepsilon^2).$$

Příkladem použití neisochronních variací je variační princip Maupertuisův, který platí pro *konzervativní* soustavy, kde vazby jsou holonomní skleronomní a síly jsou dané potenciálem $U = U(q)$. V tom případě se zachovává zobecněná energie (126) a uvažujeme proto pouze třídu funkcí $q(t)$, pro které platí $E(q(t), \dot{q}(t)) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = const = E_0$. Ukážeme, že stacionárním bodům tzv. *zkrácené akce*

$$S_0[q] := \int_{t_1(q)}^{t_2(q)} 2\,T(q(t), \dot{q}(t), t)\,dt, \tag{171}$$

kde T je kinetická energie, opět odpovídají řešení pohybových rovnic, t.j. Lagrangeových rovnic druhého druhu. Definiční obor S_0 je

$$C := \{q : [t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2] \to \Omega \subset \mathbf{R}^s,\ q_j, \dot{q}_j \text{ spojité},\ E(q, \dot{q}) = E_0,$$
$$Q_1 = q(t_1 + \Delta t_1), Q_2 = q(t_2 + \Delta t_2)\} = C(Q_1, Q_2, t_1, t_2, E_0). \tag{172}$$

*Důkaz: Rozdíl hodnot funkcionálů zkrácené akce

$$\delta S_0 := S_0[q'] - S_0[q] = \int_{t'_1}^{t'_2} 2\,T(q', \dot{q}')\,dt - \int_{t_1}^{t_2} 2\,T(q, \dot{q})\,dt = \tag{173}$$

$$\int_{t'_1}^{t_1} 2\,T(q', \dot{q}')\,dt + \int_{t_1}^{t_2} 2\Big[T(q', \dot{q}') - T(q, \dot{q})\Big]\,dt + \int_{t_2}^{t'_2} 2\,T(q', \dot{q}')\,dt =$$

$$O(\varepsilon^2) - 2\,T(q(t_1), \dot{q}(t_1))\,\Delta t_1 + 2\,T(q(t_2), \dot{q}(t_2))\,\Delta t_2 + \int_{t_1}^{t_2} 2\Big[T(q'(t), \dot{q}'(t)) - T(q(t), \dot{q}(t))\Big]\,dt.$$

Je snadné ukázat, že při skleronomních holonomních vabách má kinetická energie tvar (cvičení 42)

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} \gamma_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad \gamma_{jk}(q) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}, \tag{174}$$

takže

$$E = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - (T - U) = 2T - (T - U) = T + U \ \Rightarrow\ L := T - U = 2T - E \tag{175}$$

a lineární přírůstek S_0 v ε je

$$\delta S_0 = -\Big[L(q(t_1), \dot{q}(t_1)) + E\Big]\Delta t_1 + \Big[L(q(t_2), \dot{q}(t_2)) + E\Big]\Delta t_2$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \Big[L(q'(t), \dot{q}'(t)) - L(q(t), \dot{q}(t))\Big]\, dt. \tag{176}$$

Integrací per partes posledního členu dostáváme (viz (167)–(169))

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t)), \delta q_j(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t))\right)\right] \delta q_j(t) dt.$$

Díky (170)

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t))\, \delta q_j(t)\right]_{t_1}^{t_2} = -\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t_2), \dot{q}(t_2))\, \dot{q}_j(t_2)\Delta t_2 - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t_1), \dot{q}(t_1))\, \dot{q}_j(t_1)\Delta t_1\right]$$

a tyto členy se odečtou od prvních dvou členů v (176) (neboť $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L$),takže

$$\delta S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q(t), \dot{q}(t))\right)\right] \delta q_j(t) dt,$$

odkud podle základního lemmmatu variačního počtu plynou opět Lagangeovy rovnice druhého druhu.

Pro zákony pohybu *konzervativních* soustav tedy platí Maupertiusův princip: **Časový vývoj konzervativních soustav z bodu Q_1 v čase t_1 do bodu Q_2 v čase t_2 se děje po křivkách v konfiguračním prostoru soustavy na nichž zkrácená akce (171) nabývá stacionární hodnoty vzhledem k neisochronním variacím ponechávajícím hodnoty celkové energie konstantní.**

6.2.3 Jacobiho princip

Z Hamiltonova či Maupertuisova principu, t.j. z podmínek pro stacionární body akce získáme rovnice pro časový vývoj polohy, t.j. křivku v konfiguračním prostoru *parametrizovanou časem.* Slabší Jacobiho princip, který rovněž platí pro *konzervativní* soustavy, stacionarizuje zkrácenou akci (171) určí pouze tvar dráhy, nikoliv to, jak je probíhána čase.

Zkrácenou akci lze díky (174) a (175) upravit na tvar

$$S_0[q] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E_0 - U(q))}\sqrt{\gamma_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k}dt, \tag{177}$$

kde $q(t_1) = Q_1$, $q(t_2) = Q_2$. Přejdeme-li k jiné parametrizaci křivek q, kde τ již nemá význam fyzikálního času

$$t \;\to\; \tilde{t}(\tau),\; q(t) \;\to\; Q(\tau) := q(\tilde{t}(\tau)), \tag{178}$$

funkcionál (177) přejde na tvar

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E_0 - U(Q))}\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}d\tau = S_0(Q), \tag{179}$$

kde $Q(\tau_1) = Q_1$, $Q(\tau_2) = Q_2$. Porovnáním (177) a (179) je vidět že hodnota S_0 *nezávisí na parametrizaci* křivky, po které se systém podle Maupertuisova principu vyvíjí v čase. Zkrácenou akci je tedy možno zapsat jako křivkový integrál

$$S_0(Q) = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{2(E_0 - U(Q))}dl, \tag{180}$$

kde dl je element délky v s-rozměrném konfiguračním prostoru určený "metrickým tensorem" γ_{jk}

$$dl = \sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}\, d\tau.$$

Euler–Lagrangeovy rovnice, které plynou z podmínky stacionárnosti $\delta S_0[Q] = 0$ v oboru

$$\begin{aligned} C := \{Q : [\tau_1, \tau_2] \to \Omega \subset \mathbf{R}^s,\ Q_j, \dot{Q}_j \text{ spojité},\ E(Q, \dot{Q}) = E_0, \\ Q(\tau_1) = Q_1,\ Q(\tau_2) = Q_2\} = C(Q_1, Q_2, E_0), \end{aligned} \tag{181}$$

(Maupertuisův princip) pak **určují tvar dráhy konzervativní soustavy s celkovou energií E_0 v jejím konfiguračního prostoru**, avšak nikoliv její závislost na konkrétní parametrizaci $Q = q(t) = Q(\tau) =$ jakákoliv další parametrizace.[34]

Povšimněte si, že pro volný hmotný bod ($U = 0$) bez vazeb ($\gamma_{jk} = \delta_{jk}$) je S_0 až na nepodstatný faktor $\sqrt{2E_0}$ přímo eukleidovská délka křivky mezi Q_1 a Q_2. Křivka minimální délky spojující tyto dva body je přímka, což je právě dráha volného hmotného bodu. Analogem nebo, chcete-li, zobecněním Jacobiho principu (180) je Fermatův princip v optice pro tvar paprsku, kde

$$S_0(Q) := \int_{Q_1}^{Q_2} n(Q))dl \tag{182}$$

a $n(Q)$ je index lomu v místě Q.

[34]Na funkcionál (180) je možno též nahlížet jako na délku křivky $Q(\tau)$ mezi body Q_1, Q_2 na prostoru s metrickým tensorem $(E_0 - U(Q)\,)\gamma_{jk}(Q)$. Dráha pohybu konzervativní soustavy je pak geodetika v prostoru s tímto metrickým tensorem (t.j. nejkratší nebo aspoň stacionární křivka mezi body Q_1, Q_2).

Přestože Jacobiho princip neurčuje pohyb bodu po nalezené křivce v čase, je možno časovou závislost tohoto pohybu určit z invariance elementu délky vůči reparametrizaci (178)

$$\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}\,d\tau = \sqrt{\gamma_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k}\,dt = \sqrt{2T}\,dt. \tag{183}$$

Odtud plyne

$$t = \int^{\tau} \frac{\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}}{\sqrt{2T}}\,d\tau' = \int^{\tau} \frac{\sqrt{\gamma_{jk}(Q)\dot{Q}_j\dot{Q}_k}}{\sqrt{2(E_0 - U(Q))}}\,d\tau' =: \tilde{t}(\tau). \tag{184}$$

Určíme-li tedy z Jacobiho principu tvar křivky $Q(\tau)$ v jakékoliv parametrizaci, pak inverzí funkce $\tilde{t}$ a dosazením $\tau = \tilde{t}^{-1}(t)$ do $Q(\tau)$ dostaneme $q(t) = Q(\tilde{t}^{-1}(t))$, tedy *závislost* bodů této křivky *na čase*, t.j. odpovídající časový vývoj soustavy.

6.3 * Věta Noetherové podruhé

Z požadavku invariance Lagrangeovy funkce vůči jednoparametrické grupě transformací jsme v podkapitole (5.4) z věty Noetherové obdrželi zachovávající se veličinu (134). Na druhé straně je snadné ukázat (viz cvičení 49), že zobecněná energie (126) se za podmínky $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ rovněž zachovává, přestože nemá tvar (134). Otázkou tedy je, zda je možno zobecněnou energii získat jako důsledek invariance vůči nějaké jednoparametrické grupě transformací. Odpověď je kladná a plyne z následující věty:

Věta 6.1 *Nechť pravé strany Lagrangeových rovnic druhého druhu jsou nulové, t.j.* $Q_j^{(o)} = 0,\ j = 1, \ldots, s$. *Pak ke každé grupě transformací souřadnic* **a času** *závisejících spojitě na reálném parametru, které ponechávají* **akci** *invariantní,existuje nekonstantní první integrál pohybových rovnic.*

Pro jednoduchou transformaci času $t' = t + \varepsilon$ *má první integrál tvar*

$$F(q,\dot{q},t) := L(q,\dot{q},t) - \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q},t) + \sum_{j=1}^{s} Y_j(q,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q},t), \tag{185}$$

kde $Y_j(q,t)$ *je vektorové pole generující příslušnou jednoparametrickou grupu transformací souřadnic.*

Dokážeme tuto větu pro $s = 1,\ q_1 = q$. Důkaz pro $s > 1$ je zcela analogický. Nechť je dána akce jednoparametrické grupy (s parametrem ε) transformací[35]

$$\psi_\varepsilon : (q,t) \mapsto (q_\varepsilon, t_\varepsilon),\ q_\varepsilon = \phi(q,t,\varepsilon),\ t_\varepsilon = t + \varepsilon, \tag{186}$$

[35] Všimněte si, že (na rozdíl od (137)) v tomto případě předpokládáme i (ne nutně) jednoduchou transformaci času

kde

$$\phi(q,t,0)=q, \tag{187}$$

takže

$$\frac{\partial\phi}{\partial q}(q,t,0)=1,\ \frac{\partial\phi}{\partial t}(q,t,0)=0,\ \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(q,t,0)=:Y(q,t). \tag{188}$$

Tato akce indukuje akci grupy na funkcích $\tilde{q}(t)$

$$\tilde{\psi}_\varepsilon:\tilde{q}\mapsto\tilde{q}_\varepsilon,\ \tilde{q}_\varepsilon(t_\varepsilon):=\phi(\tilde{q}(t),t,\varepsilon)=\phi(\tilde{q}(t_\varepsilon-\varepsilon),t_\varepsilon-\varepsilon,\varepsilon) \tag{189}$$

a rovněž akci grupy na funkcionálu akce s danou Lagrangeovou funkcí $L=L(q,\dot{q},t)$.

$$\widehat{\psi}_\varepsilon:S[\tilde{q}]\mapsto S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]:=\int_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{2,\varepsilon}}L\left(\tilde{q}_\varepsilon(t'),\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'),t'\right)dt'. \tag{190}$$

Podmínka invariance akce vůči $\widehat{\psi}_\varepsilon$ je

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]\right)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon}L((\tilde{q}_\varepsilon(t'),\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'),t')dt'\right]\Big|_{\varepsilon=0}=0. \tag{191}$$

Výpočet levé strany (191) je poněkud zdlouhavý. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{\tau_1(\varepsilon)}^{\tau_2(\varepsilon)}f(t,\varepsilon)\,dt=$$

$$\tau_2'(\varepsilon)\,f(\tau_2(\varepsilon),\varepsilon)-\tau_1'(\varepsilon)\,f(\tau_1(\varepsilon),\varepsilon)+\int_{\tau_1(\varepsilon)}^{\tau_2(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(t,\varepsilon)\,dt$$

dostaneme

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]\right)\Big|_{\varepsilon=0}=L(\tilde{q}(t_2),\dot{\tilde{q}}(t_2),t_2)-L(\tilde{q}(t_1),\dot{\tilde{q}}(t_1),t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{d\varepsilon}L\left(\tilde{q}_\varepsilon(t'),\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'),t'\right)\Big|_{\varepsilon=0}dt'$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt'}L\left(\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'\right)+\frac{d}{d\varepsilon}L\left(\tilde{q}_\varepsilon(t'),\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'),t'\right)\Big|_{\varepsilon=0}\right]dt'=0, \tag{192}$$

kde

$$\frac{d}{d\varepsilon}L\left(\tilde{q}_\varepsilon(t'),\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'),t'\right)\Big|_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial L}{\partial q}((\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'))\,\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{q}_\varepsilon(t')+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}((\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'))\,\frac{d}{d\varepsilon}\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t')\right]_{\varepsilon=0} \tag{193}$$

a

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{q}_\varepsilon(t')\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\phi(\tilde{q}(t'-\varepsilon),t'-\varepsilon,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial q}(\tilde{q}(t'),t',0)\dot{\tilde{q}}(t')(-1)+\frac{\partial\phi}{\partial t}(\tilde{q}(t'),t',0)(-1)+\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(\tilde{q}(t'),t',0).$$

Díky (189,188) pak dostáváme

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{q}_\varepsilon(t')\Big|_{\varepsilon=0} = -\dot{\tilde{q}}(t') + Y(\tilde{q}(t'),t') \tag{194}$$

a odtud

$$\frac{d}{d\varepsilon}\dot{\tilde{q}}_\varepsilon(t'))\Big|_{\varepsilon=0} = -\ddot{\tilde{q}}(t') + \frac{d}{dt'}Y(\tilde{q}(t'),t'). \tag{195}$$

Dosadíme-li do (193) pak z požadavku (192) plyne, že akce je invariantní, pokud vektorové pole Y splňuje rovnici

$$\frac{\hat{d}}{dt}L + \frac{\partial L}{\partial q}(Y-\dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\frac{\hat{d}}{dt}Y - \ddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q}Y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\frac{\partial Y}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Y}{\partial t}) = 0, \tag{196}$$

což je podmínka pro vektorové pole Y, která zaručuje, že jednoparamtrická grupa transformací odpovídající tomuto poli ponechává akci invariantní (srovnej s rovnicí (136)).

Přepíšeme-li dále pomocí (194,195) rovnici (192) do tvaru

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt'}L((\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t')) + \frac{\partial L}{\partial q}((\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'))\Big(Y(\tilde{q}(t'),t') - \dot{\tilde{q}}(t')\Big) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}((\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'))\left(\frac{d}{dt}Y(\tilde{q}(t'),t') - \ddot{\tilde{q}}(t')\right)\right] dt'$$

a použijeme Lagrangeovy pohybové rovnice druhého druhu dostaneme

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(S_\varepsilon[\tilde{q}_\varepsilon]\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt'}\left[L\left(\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t'\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t'),\dot{\tilde{q}}(t'),t')\left(Y(\tilde{q}(t'),t') - \dot{\tilde{q}}(t')\right)\right] dt'.$$

Z požadavku invariance akce (191) vůči jednoparametrické grupě generované polem Y odtud plyne

$$L(\tilde{q}(t_2),\dot{\tilde{q}}(t_2),t_2) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t_2),\dot{\tilde{q}}(t_2),t_2)\left(Y(\tilde{q}(t_2),t_2) - \dot{\tilde{q}}(t_2)\right) =$$

$$L(\tilde{q}(t_1),\dot{\tilde{q}}(t_1),t_1) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tilde{q}(t_1),\dot{\tilde{q}}(t_1),t_1)\left(Y(\tilde{q}(t_1),t_1) - \dot{\tilde{q}}(t_1)\right), \tag{197}$$

takže výraz (185) nezávisí na čase a je prvním integrálem pohybových rovnic.

Snadno ověříme, že pro $Y = 0$ je tento první integrál zobecněná energie (126).

7 Otázky ke zkoušce

1. Transformace souřadnic, vektorů, tensorů, vektorových polí.
   Grupy $GL(n), O(n), SO(n)$. Jak se liší transformace souřadnic bodu od transfomace složek vektoru? Jak se liší transformace vektoru od transformací vektorového pole? Fyzikální příklady tensorů, vektorových polí, skalárních polí.
2. * Orientace vektorového prostoru, pseudoveličiny, vektorový součin. Jak se změní vektorový součin při změně orientace, při změně baze? Mění se se změnou orientace i baze? Fyzikální příklady pseudovektorů.
3. Inerciální soustava, Galileovy transformace, schema odvození. Kdy je laboratoř dostatečným přiblížením inerciální soustavy a kdy ne? Co to znamená, že Galileovy transformace tvoří grupu?
4. Druhý Newtonův zákon v neinerciální soustavě, schema odvození, tensor a vektor úhlové rychlosti otáčení.
5. Úloha dvou těles, Keplerova úloha. Jaké jsou předpoklady?
6. Věta o viriálu, důkaz. Homogenní funkce, příklady homogenních potenciálů.
7. Tuhé těleso, bezsilový setrvačník, Eulerovy rovnice, schema odvození. Jakými veličinami popíšeme pohyb tuhého tělesa? Jakou matematickou přednost má vztažná soustava pevně spojená s tělesem? Co je precese Země?
8. Lagrangeova funkce pro hmotný bod v poli potenciálových sil a v elektromagnetickém poli. Jaký je její definiční obor?
9. Lagrangeův popis systémů s holonomními vazbami. Jaký požadavek musí splňovat zobecněné souřadnice? Jaký je rozdíl mezi totální a parciální derivací podle času? Na jaké funkce působí totální derivace? Definice $\frac{\hat{d}}{dt}$.
10. Zachovávající se veličiny v Lagrangeově mechanice, cyklické souřadnice.
11. Věta Noetherové. *Co znamená jednoparametrická grupa transformací?
12. Statická rovnováha, princip virtuální práce.
13. Dynamická rovnováha, d'Alembertův princip.
14. Hamiltonův princip. Základní věta variačního principu. Množina funkcí ve které provádíme variace.
15. * Isochronní a neisochronní variace. Maupertuisův princip
16. Jacobiho princip, Fermatův princip.

8 Přehled základních vzorečků z analytické mechaniky

Znalost níže uvedených vzorečků je **nutná nikoliv postačující** podmínka pro absolvování zkoušky z TEF1.

Věta o derivování složených funkcí více proměnných. Nechť

$$\hat{F}(q_1, q_2, \ldots, q_S) \equiv \hat{F}(\vec{q}) := F(\vec{\hat{x}}(\vec{q})),$$

kde

$$F = F(\vec{x}) \equiv F(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

a

$$x_j = \hat{x}_j(q_1, q_2, \ldots, q_s), \; j = 1, \ldots, N.$$

Pak

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial q_i}(\vec{q}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{\hat{x}}(\vec{q})) \, \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial q_i}(\vec{q}), \quad i = 1, \ldots, S.$$

Často se poněkud nekorektně zato přehledně píše $F(\vec{q}) = F(\vec{x}(\vec{q}))$,

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Tento vzoreček se snadno pamatuje, je ale třeba znát jeho pravý obsah uvedený výše.

Transformace kartézských souřadnic mezi vztažnými soustavami $(o, (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n))$, $(\tilde{o}, (\tilde{\mathbf{e}}_1, ..., \tilde{\mathbf{e}}_n))$, kde $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j S_{ji}, \quad S_{ji} \in O(n) \;\Leftrightarrow\; S^{-1} = S^T$.

$$x_i(b) = S_{ij}(\tilde{x}_j(b) - \tilde{x}_j(o)) \;\Leftrightarrow\; \vec{x}(b) = S \cdot (\vec{\tilde{x}}(b) - \vec{\tilde{x}}(o)).$$

Inverzní transformace

$$\tilde{x}_i(b) = S_{ji}(x_j(b) - x_j(\tilde{o})) \;\Leftrightarrow\; \vec{\tilde{x}}(b) = S^T \cdot (\vec{x}(b) - \vec{x}(\tilde{o})).$$

Transformace složek tensoru řádu (p, q)

$$\tilde{T}^{j_1 j_2 \ldots j_p}{}_{i_1 i_2 \ldots i_q} =$$

$$= (S^{-1})^{j_1}{}_{m_1}(S^{-1})^{j_2}{}_{m_2}\dots(S^{-1})^{j_p}{}_{m_p}T^{m_1m_2\dots m_p}{}_{k_1k_2\dots k_q}S^{k_1}{}_{i_1}S^{k_2}{}_{i_2}\dots S^{k_q}{}_{i_q}.$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1\dot{\tilde{\Omega}}_1 &= (\tilde{I}_2-\tilde{I}_3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3+\tilde{N}_1^{(e)},\\
\tilde{I}_2\dot{\tilde{\Omega}}_2 &= (\tilde{I}_3-\tilde{I}_1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1+\tilde{N}_2^{(e)},\\
\tilde{I}_3\dot{\tilde{\Omega}}_3 &= (\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2+\tilde{N}_3^{(e)}.
\end{aligned}$$

Vazbová síla pro holonomní vazby $f_K(\vec{X},t)=0,\ K=j,\dots,p$

$$F_i^{(v)}(\vec{X},t)=\sum_{K=1}^{p}\lambda_K(t)\frac{\partial f_K}{\partial x_i}(\vec{X},t).$$

Totální derivace

$$\frac{\hat{d}}{dt}[F(q,\dot{q},t)] := \dot{q}_j\frac{\partial F}{\partial q_j}(q_j,\dot{q}_j,t)+\ddot{q}_j\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}(q_j,\dot{q}_j,t)+\frac{\partial F}{\partial t}(q_j,\dot{q}_j,t).$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L(q,\dot{q},t)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}L(q,\dot{q},t)=Q_j^{(o)}.$$

Lorentzova síla a její potenciál

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t)=e\left(\vec{E}(\vec{x},t)+\vec{v}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right),$$

$$U(\vec{x},\vec{v},t)=e\left(\varphi(\vec{x},t)-\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right),$$

Zobecněná hybnost

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_j,\dot{q}_j,t).$$

Zobecněná energie

$$E=\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_j,\dot{q}_j,t)-L(q_j,\dot{q}_j,t).$$

d Alembertův princip

$$\sum_{i=1}^{3N}\left[F_i(\vec{X},\dot{\vec{X}},t)-m_i\ddot{x}_i\right]\delta x_i(t)=0.$$

Akce

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2}L(q(t),\dot{q}(t),t)dt,$$

$$q:[t_1,t_2]\to\Omega\subset\mathbf{R}^s,\ \ q_j,\dot{q}_j\ \text{spojité},\ \ q(t_1)=Q_1, q(t_2)=Q_2.$$