Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

- soustava N hm. bodů s $r \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

• soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x}, t) = 0 \ \forall k \in \hat{\pi} \} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

- soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x}, t) = 0 \ \forall k \in \hat{\pi} \} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Vazby jsou nezávislé, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

- soustava N hm. bodů s $r \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0 \;\; \forall k \in \hat{r}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x},t)=0 \;\forall k \in \hat{r}\} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Vazby jsou <u>nezávislé</u>, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$ $\forall \vec{x} \in M(t)$, $\forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby $\underbrace{f_k(\vec{x},t)=0 \;\; \forall k \in \hat{r}}_{\text{"obecné rovnice" konf. prostoru}}$ nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - r = s$ (počet stupňů volnosti).

Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

- soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0 \ \ \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k \in \hat{\pi} \} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Vazby jsou <u>nezávislé</u>, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_\pi)$ $\forall \vec{x} \in M(t)$, $\forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby $\underbrace{f_k(\vec{x},t)=0 \ \ \forall k \in \hat{\pi}}_{\text{"obecné rovnice" konf. prostoru}}$ nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - \pi = s$ (počet stupňů volnosti).

Jsou-li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbylých π nezávislých vazbeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnost matice

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\pi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\pi}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(t) \ \ \forall t.$$

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j \in \hat{s}$

vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy
(lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j \in \hat{s}$ vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy
(lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

$$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t) \qquad i \in \widehat{3N}$$

parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \quad \forall k \in \hat{r}$$

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j\in\hat{s}$

vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy
(lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

$$x_i = \hat{x}_i(q_1,\dots,q_s,t) \qquad i\in\widehat{3N}$$

parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)=s$

funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q},t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q},t),t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \quad \forall k\in\hat{r}$$

skalární součin

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\nabla f_k}_{\text{normálový vektor k nadploše } f_k(\vec{x},t)=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\vec{x}}}{\partial q_j}}_{\text{tečný vektor k j-té souřadnicové křivce ležící v nadploše}}$$

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j \in \hat{s}$ vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad i \in \widehat{3N}$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \quad \forall k \in \hat{r}$$

skalární součin

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \nabla f_k \cdot \frac{\partial \hat{\vec{x}}}{\partial q_j}$$

tečný vektor k j-té souřadnicové křivce ležící v nadploše

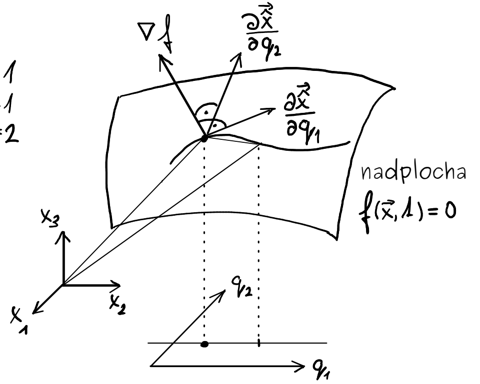
normálový vektor k nadploše $f_k(\vec{x}, t) = 0$

Př. $\mathbb{R}^3$

$N = 1$

$r = 1$

$s = 2$



Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j \in \hat{s}$ vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q}, t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad i \in \widehat{3N}$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \; \forall t \quad \forall k \in \hat{r}$$

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\nabla f_k}_{\text{normálový vektor k nadploše } f_k(\vec{x}, t) = 0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\vec{x}}}{\partial q_j}}_{\text{tečný vektor k } j\text{-té souřadnicové křivce ležící v nadploše}}$$

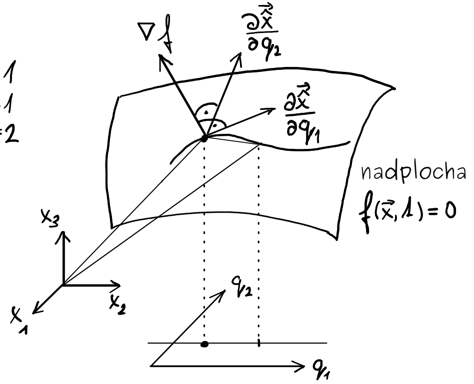
skalární součin

Př. $\mathbb{R}^3$

$N = 1$

$r = 1$

$s = 2$

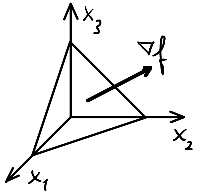


Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}) \quad \forall i \in \widehat{3N}$

Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, 1) = x_1 + x_2 + x_3 - c1 = 0$$

M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

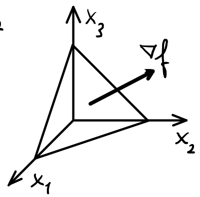


Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$$

M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2



$x_1 = q_1$

$x_2 = q_2$

$x_3 = ct - q_1 - q_2$

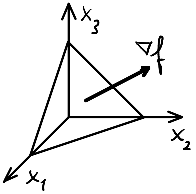
Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$$

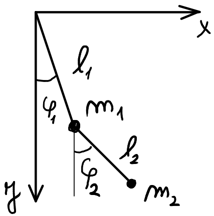
M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2

$$x_1 = q_1$$
$$x_2 = q_2$$
$$x_3 = ct - q_1 - q_2$$



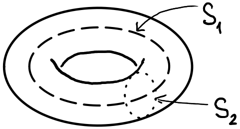
2) dvojité matematické kyvadlo v rovině



$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$M = T^2 = S_1 \times S_2$ torus



$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x},t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$$

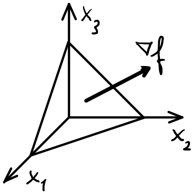
M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2

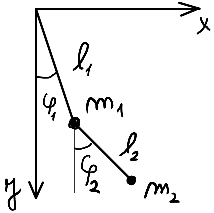
$x_1 = q_1$

$x_2 = q_2$

$x_3 = ct - q_1 - q_2$



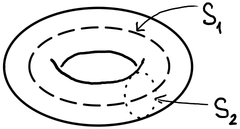
2) dvojité matematické kyvadlo v rovině



$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$M = T^2 = S_1 \times S_2$ torus



obecné souřadnice φ_1, φ_2

$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$

$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$

$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$

$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix}2x_1\\2y_1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \nabla f_2 = \begin{pmatrix}2(x_1-x_2)\\2(y_1-y_2)\\2(x_2-x_1)\\2(y_2-y_1)\end{pmatrix}$$

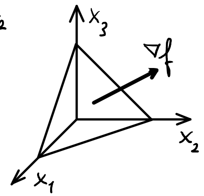
Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, 1) = x_1 + x_2 + x_3 - c1 = 0$$

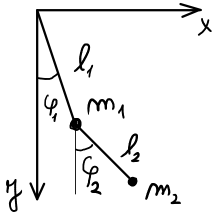
M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2

$$x_1 = q_1$$
$$x_2 = q_2$$
$$x_3 = c1 - q_1 - q_2$$



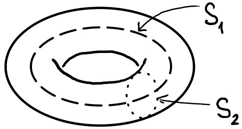
2) dvojité matematické kyvadlo v rovině



$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$M = T^2 = S_1 \times S_2$ torus

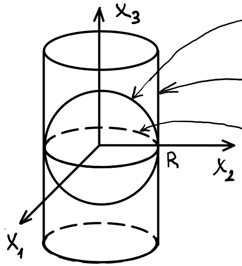


obecné souřadnice φ_1, φ_2

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$
$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

3) bod na povrchu koule a válece



$$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$$

$$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$$

M = kružnice s osou z a středem v počátku

$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LZ pro $x_3 = 0$

Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}, t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$$

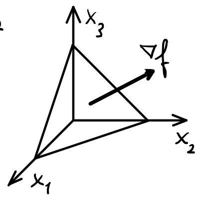
M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2

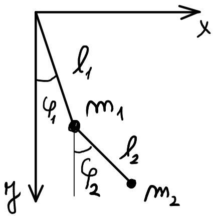
$x_1 = q_1$

$x_2 = q_2$

$x_3 = ct - q_1 - q_2$



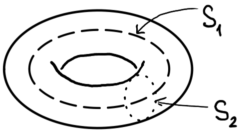
2) dvojité matematické kyvadlo v rovině



$$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$M = T^2 = S_1 \times S_2$ torus



obecné souřadnice φ_1, φ_2

$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$

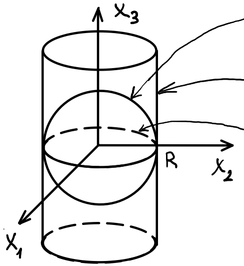
$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$

$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$

$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

3) bod na povrchu koule a válece



$$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$$

$$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$$

M = kružnice s osou z a středem v počátku

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LZ pro } x_3 = 0$$

popíšeme M pomocí funkcí s LN gradienty

$$f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) = x_3^2 = 0 \iff \tilde{f}_1(\vec{x}) = x_3 = 0$$

$$\nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LN na } M$$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$$

$$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

tím splníme r vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \forall \vec{q} \quad \forall t$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$

$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$ tím splníme r vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r} \ \forall \vec{q} \ \forall t$

Zbylých $3N$ diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1, \dots, \nabla f_r}\Big)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(\mathrm{nep})} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$

převedeme do obecných souřadnic

$$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

tím splníme r vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r} \ \forall \vec{q} \ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{\hat{x}}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{\hat{x}}}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1, \dots, \nabla f_r}\right)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

$$\text{(1)} \quad \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(\mathrm{nep})}}_{Q_j^{(\mathrm{nep})}} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}}_{\nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{\hat{x}}}{\partial q_j} = 0}$$

prvních s rovnic

$\forall j \in \hat{s} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$

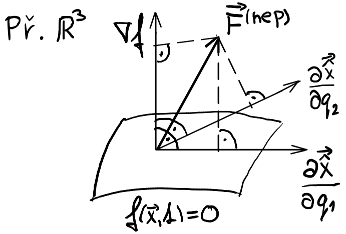
Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$

$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$ tím splníme r vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r} \ \forall \vec{q} \ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1, \dots, \nabla f_r}\Big)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$



(1) $\quad \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}}_{\nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = 0}$

prvních s rovnic

$\forall j \in \hat{s} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic $\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=F_i^{(nep)}+\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\quad \forall i\in\widehat{3N}\qquad f_k(\vec{x},t)=0\quad \forall k\in\hat{\pi}$

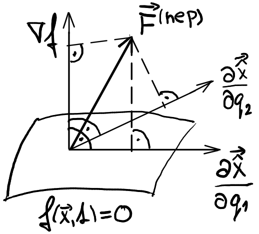
$x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t)\quad \forall i\in\widehat{3N}$ tím splníme π vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q},t)=f_k(\vec{\hat{x}}(\vec{q},t),t)\equiv 0\quad \forall k\in\hat{\pi}\ \forall\vec{q}\ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S}=\Big(\underbrace{\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_s}}_{},\underbrace{\nabla f_1,\dots,\nabla f_\pi}_{}\Big)$ je regulární matice řádu $3N\times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

Př. $\mathbb{R}^3$



$$(1)\qquad \frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]=\underbrace{\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}}+\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k\underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}}_{\nabla f_k\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_j}=0}$$

prvních s rovnic $\forall j\in\hat{s}\quad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$

$$(2)\qquad \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]=\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}F_i^{(nep)}+\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}$$

dalších r rovnic $\forall\ell\in\hat{\pi}\quad\Big/\sum_{i=1}^{3N}\quad\Big/\cdot(\mathbb{G}^{-1})_{\ell m}$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic $\quad \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$

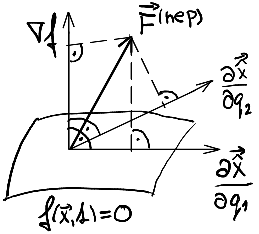
$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t) \quad \forall i \in \widehat{3N}$ tím splníme r vazebných podmínek $\hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{r} \ \forall \vec{q} \ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb{S} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1, \dots, \nabla f_r}\Big)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

Př. $\mathbb{R}^3$



$$(1) \quad \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}} \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}}}_{\nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = 0}$$

prvních s rovnic $\quad \forall j \in \hat{s} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$

$$(2) \quad \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}} \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_i}}$$

dalších r rovnic $\quad \forall l \in \hat{r} \quad \Big/ \sum_{i=1}^{3N} \quad \Big/ \cdot (\mathbb{G}^{-1})_{lm}$

$\nabla f_k \cdot \nabla f_l = G_{kl}$ prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$

$\det \mathbb{G} = \det(G_{kl}) \neq 0 \iff$ je LN soubor

$$(G^{-1})_{\ell m}\left(\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k G_{k\ell}(G^{-1})_{\ell m}=\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k \delta_{km}=\lambda_m \qquad \forall m\in\hat{\pi} \qquad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$$

$$(G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k G_{kl}(G^{-1})_{lm}=\sum_{k=1}^{\pi}\lambda_k \delta_{km}=\lambda_m \quad \forall m\in\hat{\pi} \qquad \Big/ \sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk}=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}=0=\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i=\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

$$(\mathbb{G}^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k G_{kl}(\mathbb{G}^{-1})_{lm}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\delta_{km}=\lambda_m \qquad \forall m\in\hat{r} \qquad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk}=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}=0=\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i=\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=0$$

2) $$\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}+0=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta_{jk}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$$

"pravidlo krácení teček"

$$(G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k G_{kl}(G^{-1})_{lm}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\delta_{km}=\lambda_m \qquad \forall m\in\hat{r} \qquad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk}=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}=0=\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i=\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i=\hat{\dot{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=0$

2) $\dfrac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}+0=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta_{jk}=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$ "pravidlo krácení teček"

3) $\dfrac{\hat{d}}{dt}\left(\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)=\dfrac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k+\dfrac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t\,\partial q_j}=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}\right)=\dfrac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$

$$(G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k G_{kl}(G^{-1})_{lm}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\delta_{km}=\lambda_m \qquad \forall m\in\hat{r} \qquad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk}=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}=0=\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i=\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i=\hat{\dot{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=0$$

2) $$\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}+0=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta_{jk}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$$ "pravidlo krácení teček"

3) $$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t\,\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}\right)=\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}=$$

$$(G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k G_{kl}(G^{-1})_{lm}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\delta_{km}=\lambda_m \quad \forall m\in\hat{r} \quad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk}=\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}=0=\frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q},t) \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i=\frac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \qquad \dot{x}_i=\dot{\hat{x}}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=0$

2) $\dfrac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}+0=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta_{jk}=\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$ "pravidlo krácení teček"

3) $\dfrac{\hat{d}}{dt}\left(\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)=\dfrac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k+\dfrac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t\partial q_j}=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{\hat{d}\hat{x}_i}{dt}\right)=\dfrac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right]=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}=$$

$$=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}=\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j \in \hat{s}}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t)$, $\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t)$, $\ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t)$, $\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t)$, $\ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) **-** není určena jednoznačně

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), \dot{\hat{\vec{x}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t)$$

$$\hat{L}' = \hat{L} + \frac{\hat{d}}{dt} h(\vec{q}, t)$$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálníma vazbama

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \qquad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t)$, $\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t)$, $\ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

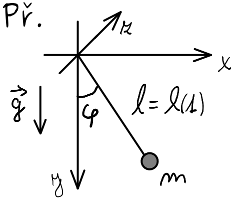
$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) – není určena jednoznačně

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), \hat{\dot{\vec{x}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t) \qquad \hat{L}' = \hat{L} + \frac{\hat{d}}{dt} h(\vec{q}, t)$$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálníma vazbama

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$$\boxed{s = 3 - 2 = 1}$$

obecné souřadnice φ

$x = l(t) \sin\varphi$

$y = l(t) \cos\varphi$

$z = 0$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m(\dot{l}^2(t) + l^2(t)\dot{\varphi}^2) + mgl(t)\cos\varphi$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \qquad \forall j \in \hat{s}}$$

- neobsahují vazbové síly
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t)$, $\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t)$, $\ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

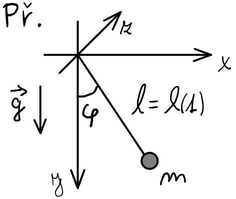
$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) – není určena jednoznačně

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\hat{\vec{x}}(\vec{q}, t), \dot{\hat{\vec{x}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t) \qquad \hat{L}' = \hat{L} + \frac{\hat{d}}{dt} h(\vec{q}, t)$$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálníma vazbama

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$

$$\boxed{s = 3 - 2 = 1}$$

obecné souřadnice φ

$x = l(t) \sin\varphi$

$y = l(t) \cos\varphi$

$z = 0$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2(t) + l^2(t)\dot{\varphi}^2) + mgl(t)\cos\varphi$$

LR2.D
$$0 = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} = \frac{\hat{d}}{dt}\left(m l^2(t) \dot{\varphi}\right) - (-mgl(t)\sin\varphi) = 2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\varphi} + ml^2(t)\ddot{\varphi} + mgl(t)\sin\varphi$$