Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
07.05.2020

Kvantová fyzika

12. cvičení

Cvičení 37:

Dokažte následující tvrzení:

1. Nechť T je uzavíratelný lineární operátor na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Jestliže projektor E redukuje operátor T, redukuje také jeho uzávěr $\overline{T}$.
2. Nechť projektor E redukuje v podstatě samosdružený operátor A. Poté je operátor $A|_{E\mathcal{H}}$ rovněž v podstatě samosdružený.
3. Nechť projektor E redukuje unitární operátor U. Poté je operátor $U|_{E\mathcal{H}}$ rovněž unitární.

Cvičení 38:

Nechť P_2 je fermionovská matice hustoty na $A_2\mathcal{H}^2$ a $\gamma = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}^1} P_2$ její redukovaný stav. Dokažte následující tvrzení:

1. Nechť θ_k je orthonormální báze $\mathcal{H}$, poté $\langle\theta, \gamma\theta\rangle = \sum_k \langle\theta \otimes \theta_k, P_2\theta \otimes \theta_k\rangle$,
2. nerovnost $\langle\theta, \gamma\theta\rangle \leq \frac{1}{2}$,
3. zobecněte předchozí výsledek pro P_N na $A_N\mathcal{H}^N$ a $\gamma = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}^{N-1}} P_2$, tzn. $\langle\theta, \gamma\theta\rangle \leq \frac{1}{N}$,
4. ukažte, že předchozí výsledek je možné využít k důkazu $0 \leq \gamma_\psi^1 \leq \mathbb{I}$, kde γ_ψ^1 je redukovaná matice hustoty pro čistý N-částicový stav ψ.

Cvičení 39:

Nechť $f_j, g_k \in L^2(\mathbb{R}^d)$ a

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N)(x_1, x_2, \ldots, x_N) := A_N(f_1 \otimes \ldots \otimes f_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\mathrm{sgn}\pi} \prod_{j=1}^{N} f_j(x_{\pi(j)})\,.$$

Dokažte, že

1. $(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\mathrm{sgn}\pi} \prod_{j=1}^{N} f_{\pi(j)}(x_j)\,.$
2. předpokládejte, že f_j, $j = 1, \ldots, N$ jsou orthonormální, poté

$$\|f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N\|_{\mathcal{H}^N} = 1\,,$$

3. $\langle f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N, g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_N\rangle = \det[\langle f_j, g_k\rangle]\,,$
4. předpokládejte, že A je $N \times N$ matice a $h_i := \sum_{j=1}^{N} A_{ij} f_j$, poté

$$h_1 \wedge h_2 \wedge \ldots \wedge h_N = \det A(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N)\,.$$

   Speciálně, pokud je A unitární matice, poté je $\wedge$-součin A-invariantní až na fázový faktor.

Cvičení 40:

Nechť $f_j \in \mathcal{H}$. Dokažte, že následující jsou ekvivalentní

1. $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_N = 0$,
2. f_j, $j = 1, \ldots, N$ jsou lineárně závislé.