Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
16.04.2020

Kvantová fyzika

9. cvičení

V dnešním cvičení v několika krocích nalezneme explicitní tvar resolventy pro Laplacian a některé její vlastnosti. Budeme potřebovat jádro rovnice vedení tepla

$$e^{t\Delta}(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

pro $d \geq 1$, $t > 0$.

Cvičení 28:
Nechť $E > 0$ a $d \geq 1$. Ukažte, že integrální jádro resolventy pro Laplacian na $L^2(\mathbb{R}^d)$ je

$$(-\Delta + E)^{-1}(x,y) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} |x-y|^{2-d} \int_0^\infty \exp\left(-|x-y|^2 Es - \frac{1}{4s}\right) s^{-\frac{d}{2}} \mathrm{d}s$$

Nápověda: Použijte tepelné jádro a následující výraz z funkcionálního počtu

$$(-\Delta + E)^{-1} = \int_0^\infty e^{-tE} e^{t\Delta} \mathrm{d}t\,.$$

Cvičení 29:
Nechť $E > 0$ a $d \geq 3$. Ukažte, že pro integrální jádro resolventy pro Laplacian na $L^2(\mathbb{R}^d)$ platí

$$0 \leq (-\Delta + E)^{-1}(x,y) \leq c_d |x-y|^{2-d} e^{-(1-\epsilon)\sqrt{E}|x-y|}$$

kde $\epsilon > 0$. *Nápověda*: Může se hodit fakt, že $\forall a > 0$ je $a + a^{-1} \geq 2$.

Cvičení 30:
Nechť $E > 0$ a $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Ukažte, že operátor $V(-\Delta + E)^{-1}$ je omezený na $L^2(\mathbb{R}^3)$ a

$$\|V(-\Delta + E)^{-1}\| \to 0$$

pro $E \to \infty$.
Nápověda: Odhadněte výraz $\|V(-\Delta + E)^{-1}\varphi\|$ pro $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Využijte faktu, že $(-\Delta + E)^{-1}$ je konvoluční operátor a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pro konvoluci.