Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
09.04.2020

Kvantová fyzika

8. cvičení

Cvičení 27:
Nechť $t \in \mathbb{R}$ poté definujeme omezený lineární operátor $e^{i\Delta t} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ jako

$$e^{i\Delta t} = F^{-1} M_{V(k)} F$$

kde F je n-rozměrná Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $M_{V(k)}$ je operátor násobení funkcí $V(k) = \exp(-i|k|^2 t)$. Ukažte, že

1. $\forall \psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\left(e^{i\Delta t}\psi\right)(x) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}n\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(i\frac{|x-y|^2}{4t} - \epsilon|y|^2\right)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \psi(y)dy\,.$$

skoro všude na $\mathbb{R}^n$.

2. $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left\| e^{i\Delta t}\psi - \exp\left(-i\frac{\pi}{4}n\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(i\frac{|x-y|^2}{4t} - \epsilon|y|^2\right)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \psi(y)dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0\,.$$

3. $\forall \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(t,x) := \left(e^{i\Delta t}\psi\right)(x)$ platí

$$i\partial_t \Phi(t,x) = -\Delta_x \Phi(t,x)\,.$$