



## Kvantová fyzika

### 6. cvičení

V dnešním cvičení se budeme zabývat konstrukcí kvantových grafů. Budeme uvažovat  $m$  nekonečně dlouhým hran a  $n$  konečně dlouhých hran obecně různých délek. Zavedeme  $m + n$ -komponentovou funkci  $\psi$  z prostoru  $\mathcal{H} := \bigoplus_{k=1}^m H^2(\mathbb{R}^+) \bigoplus_{j=1}^n H^2((0, l_j))$  a zobrazení  $\underline{\psi}, \underline{\psi}' : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^{2(m+2n)}$

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \vdots \\ \psi_{m+n}(0) \\ \psi_{m+1}(l_1) \\ \vdots \\ \psi_{m+n}(l_n) \end{pmatrix}, \quad \underline{\psi}' = \begin{pmatrix} \psi'_1(0_+) \\ \vdots \\ \psi'_{m+n}(0_+) \\ -\psi'_{m+1}((l_1)_-) \\ \vdots \\ -\psi'_{m+n}((l_n)_-) \end{pmatrix}$$

kde  $\underline{\psi}, \underline{\psi}'$  označují hodnoty  $\psi$  na koncích hran a hodnotu derivace vystupující z konce hran.

**Cvičení 20:** Necht'  $-\Delta_0$  je operátor definovaný jako

$$-\Delta_0 \psi := (-\Delta \psi_1, \dots, -\Delta \psi_m, -\Delta \psi_{m+1}, \dots, -\Delta \psi_{m+n})^T$$

s definičním oborem  $\mathcal{D}(-\Delta_0) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \underline{\psi} = 0 = \underline{\psi}'\}$ . Spočítejte indexy defektu operátoru  $-\Delta_0$ .

**Cvičení 21:** Necht'  $-\Delta_{A,B}$  je operátor definovaný jako

$$-\Delta_{A,B} \psi := (-\Delta \psi_1, \dots, -\Delta \psi_m, -\Delta \psi_{m+1}, \dots, -\Delta \psi_{m+n})$$

s definičním oborem  $\mathcal{D}(-\Delta_{A,B}) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid A \underline{\psi} + B \underline{\psi}' = 0\}$ , kde  $A, B$  jsou komplexní  $(m + 2n) \times (m + 2n)$ -matice. Ukažte, že  $-\Delta_{A,B}$  je samosdružený, právě tehdy když matice  $(A, B)$  má maximální hodnotu a  $AB^*$  je samosdružený operátor.

**Cvičení 22:** Očividně matice  $A, B$  nejsou unikátní. Ukažte, že každému samosdruženému rozšíření  $-\Delta_0$  lze jednoznačně přiřadit unitární matici  $U$  takovou, že

$$-\Delta_U \psi := (-\Delta \psi_1, \dots, -\Delta \psi_m, -\Delta \psi_{m+1}, \dots, -\Delta \psi_{m+n})$$

s definičním oborem  $\mathcal{D}(-\Delta_U) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (U - I) \underline{\psi} + i(U + I) \underline{\psi}' = 0\}$ .

**Cvičení 23:** Ukažte, že úlohy 21 a 22 jsou ekvivalentní.

*Nápověda:* Pro více informací je možné nahlédnout do Vadim Kostrykin, Robert Schrader: Kirchhoff's Rule for Quantum Wires