**Katedra fyziky**
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
05.03.2020

# Kvantová fyzika

## 3. cvičení

**Cvičení 8:**
Nechť $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ je lineární operátor takový, že $\langle \psi, A\psi \rangle = \langle A\psi, \psi \rangle$ pro všechna $\psi \in \mathcal{D}(X)$. Ukažte, že

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle$$

pro každé $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(X)$.
*Nápověda*: Využijte polarizační identitu.

**Cvičení 9:**
Nechť $V \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Definujeme operátor $M_V : \mathcal{D}(M_V) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ jako

$$M_V f(x) = V(x) f(x)$$

kde $D(M_V) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : V \times f \in Ł^2(\mathbb{R}^n)\}$. Bez použití spektrálního teorému ukažte

$$\overline{\mathrm{Ran}(V)} \subseteq \sigma(M_V)\,.$$

**Cvičení 10:**
Nechť $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ a $g \in \mathcal{H}$ takové, že $\|g\| = 1$. Nechť $A : C_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, Af = f(0)g$. Ukažte, že

$$\langle \varphi, g \rangle \neq 0, \varphi \in \mathcal{H} \Rightarrow \varphi \notin \mathcal{D}(A^*)\,.$$

**Cvičení 11:**
Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor a $B$ je samosdružený operátor. Nechť dále existuje $c > 0$ takové, že $\|B\psi\| \geq c\|\psi\|$ pro každé $\psi \in D(B)$. Dokažte, že

1. $\mathrm{Ran}(B)$ je uzavřený.
2. $\mathrm{Ran}(B)$ je hustý.
3. $\|B^{-1}\varphi\| \leq \frac{1}{c}\|\varphi\|$ platí pro každé $\varphi \in \mathcal{H}$.