Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
28.02.2020

Kvantová fyzika

2. cvičení

Cvičení 5: *Polární dekompozice*
Nechť $B \in \mathscr{L}_c(\mathscr{H})$. Poté existuje právě jedna částečná isometrie W_B taková, že $B = W_B|B|$ a $ker(W_B) = ker(B)$. Dále $Ran(W_B) = \overline{Ran(B)}$.

Cvičení 6: *Jaderné operátory*

1. Dokažte, že každý jaderný operátor je Hilbert-Schmidtův operátor a každý Hilbert-Schmidtův operátor je kompaktní operátor, tzn.
$$\mathscr{J}_1(\mathscr{H}) \subset \mathscr{J}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H}).$$
Pro jaderný operátor B platí
$$\mathrm{Tr}|B| = \left\| \sqrt{|B|} \right\|_2^2 = \sum_j |\mu_B(j)|,$$
$$\mathrm{Tr}|B| \geq \|B\|_2 \geq \|B\|,$$
kde $\mu_B(j)$ jsou singulární hodnoty operátoru B.
2. Operátor $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ je jaderný právě tehdy, když je součinem dvou Hilbert-Schmidtových operátorů.

Cvičení 7:
Nechť $W \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Poté W nazveme statistickým operátorem, pokud je positivní a splňuje normalizační podmínku $\mathrm{Tr}\, W = 1$. Dokažte, že:

1. Množina $\mathcal{W}$ všech statistických operátorů na $\mathscr{H}$ je konvexní.
2. Operátor $W \in \mathcal{W}$ je jednorozměrný projektor právě tehdy, když je vnějším bodem $\mathcal{W}$, t.j., když z podmínky $W = \alpha W_1 + (1-\alpha) W_2$ pro $0 < \alpha < 1$ a $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ plyne $W_1 = W_2 = W$.