Katedra fyziky
Ing. Václav Potoček, Ph.D.
RNDr. Ing. Michal Jex, Ph.D.

LS2019/20
21.02.2020

Kvantová fyzika

1. cvičení

Cvičení 1:

1. Nechť je operátor $(Q\psi)(x) := x\psi(x)$ definovaný na

$$\psi \in \mathcal{D}(Q) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) | \|x\psi\| < \infty\} .$$

Ukažte, že Q je samosdružený.

2. Nechť je operátor $(P\psi)(x) := i\psi'(x)$ definovaný na

$$\psi \in \mathcal{D}(P) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^+) | \psi(0_+) = 0, \psi \,\text{je absolutně spojitá}, \psi' \in L^2(\mathbb{R}^+)\} .$$

Ukažte, že P je symetrický, ale ne samosdružený.

3. Nechť je operátor $(P\psi)(x) := i\psi'(x)$ definovaný na

$$\psi \in \mathcal{D}(P) = \left\{\psi \in L^2((a,b)) | \psi \,\text{je absolutně spojitá}, \psi' \in L^2((a,b)), \alpha\psi(a) = \psi(b)\right\} .$$

kde $-\infty < a < b < \infty$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Nalezněte všechny α, pro která je P samosdružené.

Cvičení 2:

Nalezněte spektrální rozklad operátoru $(Q\psi)(x) := x\psi(x)$ na prostoru $L^2\left((a,b)\right)$, kde $b-a < \infty$.

Cvičení 3:

Nechť X, Y jsou separabilní Hilbertovy prostory a $K : X \to Y$ linearní operátor. Poté je K kompaktní právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost $x_n \in X$ a libovolné $x \in X$ máme

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Kx_n \to Kx .$$

Cvičení 4:

Nechť X je Banachův prostor a Y je Banachův prostor s následující vlastností: Existuje sekvence konečněrozměrných lineárních operátorů $S_n \in F(Y)$ taková, že platí

$$\lim_{n\to\infty} S_n y = y , \quad \forall y \in Y .$$

Poté $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$.