1 Cvičení

1. Buď $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a buď $a \cdot b$ definovné jako počet prvočísel, které dělí číslo $10a+b$. Ukažte, že G je grupoid a napište moltiplikativní tabulku.

2. Kolik existuje zobrazení množiny $G = \{a, b, c, d\}$, která mají aspoň jeden neměnný bod (např. $\phi(a) = a$)? (175)

3. Nechť A a B jsou konečné neprázdné množiny, M množina všech zobrazení A na B. Ukažte, že mohutnost M je větší než mohutnost A.

4. Binární relace obecně - množiny A a B, A×B je množina dvojic (α, β). Binární relace ϱ je jakákoli podmnožina $\varrho \subset A \times B$.

   Úkol: Mějme množinu M a je dán systém jejich disjunktních podmnožin. Nechť ϱ jsou takové podmnožiny $(x, y) \in (M \times M)$, kdy x,y jsou ve stejné podmnožině. Ukažte, že je to ekvivalence.

5. Dokažte, že grupy D_6 a S_3 jsou izomorfní. Jaký je vztah mezi D_8 a S_4?

6. Dokažte, že řád $|GL_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ a že je nekomutativní. Dokažte, že pro p prvočíslo platí:

   $$|GL_2(\mathbb{Z}_p)| = p^4 - p^3 - p^2 + p$$

   a $\mathbb{Z}_p$.

2 Cvičení

7. Dokažte:
   - je-li $\phi : G \to H$ izomorfismus, potom $|\phi(x)| = |x|$.
   - je-li $\phi : G \to H$ homomorfismus, potom $\mathrm{Im}(\phi) \leq H$, a je-li injektivní pak $G \simeq \phi(G)$
   - že zobrazení $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$ je homomorfismus a najděte jeho jádro.
8. Dokažte, že pro konečnou grupu platí pro $\forall g \in G$ je $Gg \equiv G$.
9. Najděte normalizátor a centralizátor množiny $A \equiv \{Id, (12)\}$ v grupě S_3. (Id je identická permutace, (12) transpozice prvků 1 a 2)
10. Nechť pro podmnožiny A, B grupy G platí $A \subseteq B$. Dokažte, že $\langle A \rangle \leq \langle B \rangle$. Ukažte příklad kdy $A \neq B$ a $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.
11. Mějme množinu $\mathcal{M}$ a na ní relaci ekvivalence $\rho : x \sim y$. Podmnožinu $\mathcal{K}$ nazveme ρ třídou pokud pro $\forall u, v \in \mathcal{K}$ platí $u \sim v$. Dokažte, že dvě ρ třídy jsou disjunktní (případně totožné).

3 Cvičení

12. Popište jádra a vlákna homorofismů:
    - $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; \phi(x, y) = x + y.$
    - $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; \pi(x, y) = x.$
    - $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \;\; \phi(x) = |x|.$
    - $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \;\; \phi(a + \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$

13. Nechť G grupa, $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, x_2, \ldots, x_r$ jsou **všechny prvky** řádu n v grupě. Dokažte, že $N =< x_1, x_2, \ldots, x_r >$ je normální podgrupa.

14. V grupě D_8 platí $< s > \trianglelefteq < s, r^2 > \trianglelefteq D_8$. Ukažte, že $< s > \leq D_8$ není normální.

15. Nechť $N \trianglelefteq G$. Označme $\overline{G} = G/N$ a $\overline{x} = xN$. Dokažte, že $G = \langle x, y \rangle \;\Rightarrow\; \overline{G} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$.

    Obecněji:

    $G = \langle S \rangle \;\Rightarrow \overline{G} = \langle \overline{S} \rangle$.

16. Nechť G je nekomutativní grupa a Z její centrum. Ukažte, že G/Z není cyklická

4 Cvičení

17. Ukažte, že grupa A_4 nemá podgrupu řádu 6, tj. s indexem 2. A_4 je 12ti prvková grupa symetrie pravidelného čtyřstěnu.

18. Mějme grupu G a nechť $a, b \in G$. Dokažte, že prvek konjugovaný k ab je součin prvků konjugovaných k a a b.

19. Nechť $H \leq G$ a fixujme $g \in G$.

    - Dokažte, že gHg^{-1} je podgrupa stejného řádu.
    - pokud H je **jediná** podgrupa řádu n, že je charakteristická.

20. Ukažte, že v grupě S_3 pro podgrupy $H = \langle(12)\rangle$ a $K = \langle(23)\rangle$ není HK podgrupa. (i pomocí Lagrangeovy věty)

21. Mějme grupu G. Dokažte, že zobrazení, které přiřadí každému prvku prvek inverzní je automorfismem G právě tehdy, pokud je G komutativní.

5 Cvičení

22. Dokažte, že $SL_n(\mathbb{F}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{F})$

23. Z Lagrangeovy věty dokažte platnost malé Fermatovy věty: Pro p prvočíslo platí $a^p = a(modp)$

24. Nechť $|G| = n,\ p \mid n$ a p prvočíslo. S je množina

$$S = \{(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ip}) | x_{ik} \in G,\ x_{i1}.x_{i2}.x_{i3}.\dots x_{ip} = e\}$$

- Ukažte, že S má $|G|^{p-1}$ prvků. (Užijte rozdělení do tříd ekvivalence dyných cyklickou prmutací)
- Jednoprvková třídy ekvivalence jsou ve tvaru $(x, x, x, \dots, x),\ x^p = e$.

25. Klasifikujte grupy řádu 12. Dvě abelovské a tři komutativní $A_4,\ D_{12}$ s polopřímý součin grup $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_4$.

26. Kolik prvků řádu 7 je v prosté grupě řádu 168.

6 Cvičení

27. Sestavte tabulku charakterů D_8 a Q_8.

28. Najděte reprezentaci komplexních čísel reálnými maticemi 2x2.

29. Nechť $T(g)$ je ireducibilní reprezentace grupy reálnými maticemi $n \times n$. Nechť $X \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor rozměru n. Dokažte, že $\mathrm{Span}\{T(g_i)X\}_{g_i \in G}$ je $\mathbb{R}^n$.

30. Využitím předchozího příkladu dokažte Schurovo lemma: pokud matice komutuje se všemi maticemi ireeducibilní reprezenace, je násobkem jednotkové.

31. Nechť $G =< x >$ je nekonečná cyklická grupa. Bude zobrazení

$$T(x^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

úplně reducibilní reprezantace?