Grupy a reprezentace

Goce Chadzitaskos

Zpracováno na základě poznámek J. Mareše a s jejich využitím

wiki-skripta

Symetrie

Systémy, které studujeme v přírodě, vykazují určitý druh symetrie, a řada přírodních zákonů, které známe, je invariantní vůči jistým transformacím.

Vzpomeňte: teorém Noetherové, Gaussův a Ampérův zákon, Lorentzovy transformace, krystalické mřížky.

Množina všech možných transformací určité symetrie vytváří to, co matematici nazývají „grupa“. Tak zrcadlení v rovině vytváří grupu, která má dva prvky: zrcadlení a identitu. Ale také množina trojrozměrných rotací, množina Lorentzových transformací nebo množina trojrozměrných translací jsou grupy, které ale nyní sestávají z nekonečného množství prvků.

Do historie

- Évariste Galois (1832): kdy má obecný polynom radikálové řešení - kdy je možno kořeny zapsat jen s užitím základních aritmetických operací a odmocnin - všechny permutace, které nemění $I_1, I_2, \dots, I_n$
- Sophus Lie (1888) : Symetrie parciálních diferenciálních rovnic - spojité symetrie
- H Weyl: Symetrie je jedna z myšlenek, díky níž se lidé během věků snaží pochopit a tvořit řád, krásu a dokonalost.
- Michelangelo di Lodovico Buonarroti: Malá asymetrie oku lahodí
- obrazy Salvatora Dalího
- kvantová mechanika: Ireducibilní reprezentace (IRR) grupy symetrie na Hilbertově prostoru.
- obecná Fourierova transformace: pomocí IR je definována ortogonální báze na prostoru

SU(2)

Ze zřejmých důvodů se grupy s konečným počtem prvků nazývají diskrétní; grupy transformací, které spojitě závisí na řadě parametrů se nazývají spojité grupy.

Symetrie systému vede k určitým vztahům mezi pozorovatelnými veličinami, které jsou splněny s nekonečně vysokou přesností,
Symetrie SU(2) je zodpovědná za kvantování momentu setrvačnosti - je to dáno irreducibilními reprezentacemi.
Další hezký příklad této symetrie pro částicové fyziky jsou rodiny částic (isospin) a jejich rozpady

Příklad pro rozpad baryonové resonance na nukcleon a pion

$$\Delta^{++} \to p\pi^{+}$$

$$\Delta^{+} \to p\pi^{0} \text{ or } \to n\pi^{+}$$

$$\Delta^{0} \to n\pi^{0} \text{ or } \to p\pi^{-}$$

$$\Delta^{-} \to n\pi^{-}$$

Using the common names in particle physics, one assigns the isospin states as follows: The triplet of π mesons π^{+}, π^{0}, π^{-} respectively as $|\,{}^{2}_{2}\,\rangle$, $|\,{}^{2}_{0}\,\rangle$, $|\,{}^{\;2}_{-2}\,\rangle$; the doublet of nucleons p and n respectively as $|\,{}^{1}_{1}\,\rangle$ and $|\,{}^{\;1}_{-1}\,\rangle$ and the quadruplet of resonances $\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}$ and Δ^{-} with $|\,{}^{3}_{3}\,\rangle, |\,{}^{3}_{1}\,\rangle, |\,{}^{\;3}_{-1}\,\rangle$ and $|\,{}^{\;3}_{-3}\,\rangle$

SU(2) reprezentace

Rozpadové schéma pro rezonance

$$
\begin{aligned}
\left| {3 \atop 3} \right\rangle &= \left| {2 \atop 2} \right\rangle \left| {1 \atop 1} \right\rangle \\
\left| {3 \atop 1} \right\rangle &= \left| {2 \atop 0} \right\rangle \left| {1 \atop 1} \right\rangle \text{ or } \left| {2 \atop 2} \right\rangle \left| {1 \atop -1} \right\rangle \\
\left| {3 \atop -} \right\rangle 1 &= \left| {2 \atop 0} \right\rangle \left| {1 \atop -1} \right\rangle \text{ or } \left| {2 \atop -2} \right\rangle \left| {1 \atop 1} \right\rangle \\
\left| {3 \atop -3} \right\rangle &= \left| {2 \atop -2} \right\rangle \left| {1 \atop -1} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Amplitudy and účinné průřezy

- $\Delta^{++} \rightarrow p\pi^{+}$ is 1
- $\Delta^{+} \rightarrow p\pi^{0}$ is $\frac{2}{3}$ and $\Delta^{+} \rightarrow n\pi^{+}$ is $\frac{1}{3}$
- $\Delta^{0} \rightarrow n\pi^{0}$ is $\frac{2}{3}$ and $\Delta^{+} \rightarrow p\pi^{-}$ is $\frac{1}{3}$
- $\Delta^{-} \rightarrow n\pi^{-}$ is 1

Mějme libovolnou množinu M.
Def: Potom **n-ární operací** na M nazveme zobrazení

$$f : \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n} \to M.$$

*Operaci $f : M \times M \to M$ (binární operace) budeme nazývat **vnitřní součin** a místo $f(x, y) = z$ ji budeme značit $x \,.\, y = z$, nebo $x \; y = z$, nebo $x + y = z$,, podle potřeby.*

Neplést vnitřní součin s pojmem skalární součin (angl.: scalar product = inner product). Příkladem binární operace na vektorovém prostoru je vektorový součin vektorů. Výsledek skalarního součinu nepatří do množny M.

Grupoid, Pologrupa = asociativita

Nejobecnější objekt je dvojice množina a vnitřní součin

1. $\{M, \cdot\}$ nazýváme **grupoid**.
   Dále při splnění dodatečných podmínek zavádíme:
2. $(\forall a, b, c \in M)((ab)c = a(bc))$: **pologrupa** (asociativní grupoid),
3. $(\forall a, b \in M)(ab = ba)$: **komutativní grupoid**,
4. je -li počet prvků M konečný: **konečný grupoid**.

*Levou resp. pravou **jednotkou** v grupoidu nazýváme takový prvek e, pro který platí $eg = g$ respektive $ge = g$ pro každé g z grupoidu.*

Monoid = asociativita + jednotka

Theorem

Má-li grupoid levou a pravou jednotku, pak jsou stejné.

Důkaz.

$e_l = e_l e_p = e_p$ □

- Pologrupu s jednotkovým prvkem nazýváme **monoid**.

Navíc pokud pro $m \in M$ existuje $m^{-1} \in M$ takový, že $m^{-1}m = e$ resp. $mm^{-1} = e$, nazýváme m^{-1} **levým, resp. pravým inverzním** prvkem k m. (Díky asociativitě platí rovnost mezi levým a pravým inverzním prvkem, protože pro levou inverzi $am = e$ a pravou inverzi $mb = e$ platí $b = eb = (am)b = a(mb) = ae = a$. Proto má smysl zavést značení m^{-1}.)

Inverzní prvek

Theorem

Každý prvek monoidu má nejvýše jeden inverzní prvek.

Důkaz.

Nechť $f, g, m \in M$ *a platí* $fm = e$ *a* $gm = e$, *pak*
$f = ef = (gm)f = g(mf) = ge = g$. *Využíváme pouze asociativitu.* □

Zavádíme:

1. grupoid s **krácením**, pokud $(\forall x, y, z \in M)(zx = zy \Rightarrow x = y)$,
2. grupoid s **dělením**, pokud $(\forall x, y \in M)(\exists u, v \in M)(ux = xv = y)$.

> *Monoid, ve kterém ke každému prvku existuje inverzní prvek nazýváme* **grupa.**

Grupa $\{M, \cdot\}$ tedy splňuje vlastnosti:

1. $(\forall a, b, c \in M)((ab)c = a(bc))$,
2. $(\exists e \in M)(\forall m \in M)(em = m)$,
3. $(\forall m \in M)(\exists m^{-1} \in M)(mm^{-1} = e)$.

A tímto způsobem bývá též definována.

Příklady grup

Example

1. množina regulárních matic rozměru $n \times n$ s maticovým násobením,
2. množina čísel $\{0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1\}$ se sčítáním modulo p pro nějaké prvočíslo p, tedy $a \oplus_{modulop} b \equiv a + b \mod p$, (značená $\mathbb{Z}_p \equiv \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$),
3. množina kvaternionů s násobením.

Example

Dalším příkladem grupy je množina $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{m + n\sqrt{p} | m, n \in \mathbb{Q}\}$ s normálním násobením, kde $\mathbb{Q}$ jsou racionální čísla a p je prvočíslo. (Odmocnina z prvočísla je vždy iracionální.) Jedná se o určitou analogii komplexních čísel:
$a \cdot b = (a_1 + a_2\sqrt{p})(b_1 + b_2\sqrt{p}) = a_1 b_1 + a_2 b_1 \sqrt{p} + a_1 b_2 \sqrt{p} + a_2 b_2 p.$

*Komutativní grupu nazýváme **abelovská**.*

Okruh, těleso

Mějme množinu se dvěma vnitřními součiny $\{M, \oplus, \odot\}$.

1. Pokud je M Abelovská grupa vůči $\oplus$ a pologrupa (jen asociativita) s distributivním zákonem vůči $\odot$ (tedy $a \odot (b \oplus c) = ab \oplus ac$), nazýváme ji **okruh**.
2. Pokud je M Abelovská grupa vůči $\oplus$ a $M \setminus \{0\}$ grupa vůči $\odot$, nazýváme M **okruh s dělením**.
3. Pokud je M Abelovská grupa vůči $\oplus$ a $M \setminus \{0\}$ Abelovská grupa vůči $\odot$, nazýváme M **těleso**.

Značku 0 používáme pro jednotkový prvek vůči operaci značené $\oplus$ a značku 1 pro jednotkový prvek vůči operaci značené $\odot$ nebo $\otimes$ díky analogii s $\mathbb{R}$.

H. Weyl: *Těleso je uzavřený vesmír, kde probíhají všechny děje.*

Vektorový prostor (nad tělěsem)

Mějme množinu M, těleso $\mathbb{T}$, vnitřní součin $+ : M \times M \to M$ a vnější součin $\times : \mathbb{T} \times M \to M$. Čtveřici $\{M, \mathbb{T}, +, \times\}$ nazýváme **vektorový prostor**, pokud je abelovskou grupou vůči $+$ a platí:

1. $(\forall \alpha \in \mathbb{T})(\forall x, y \in M)(\alpha \times (x + y) = \alpha \times x + \alpha \times y)$,
2. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T})(\forall x \in M)((\alpha + \beta) \times x = \alpha \times x + \beta \times x)$,
3. $(\forall x \in M)(1 \times x = x)$,
4. $(\forall x \in M)(0 \times x = 0)$.

Též **lineární prostor**

Lineární algebra

Mějme $\{M, \mathbb{T}, +, \times, \odot\}$ vektorový prostor s dodatečným vnitřním součinem $\odot$. Zavádíme pojmy:

1. pro M grupoid s distributivním zákonem vůči $\odot$ **lineární algebra** nad $\mathbb{T}$,
2. pro M pologrupu s distributivním zákonem vůči $\odot$ **asociativní algebra** nad $\mathbb{T}$,
3. pro M pologrupu s distributivním a komutativním zákonem vůči $\odot$ **komutativní algebra** nad $\mathbb{T}$.

Druhy grup

Jednou z možností je klasifikace grup podle počtu prvků na konečné, diskrétní nekonečné (spočetné), nespočetné.
Speciální a důležitou skupinou jsou topologické grupy:

> *Mějme grupu $G = \{M, \cdot\}$ a topologii na M. G nazýváme **topologickou grupou**, pokud pro $\forall x, y \in M$ jsou zobrazení $f_y(x) = x \cdot y$ a $g(x) = x^{-1}$ spojitá.*

Topologie: Množina a systém otevřených podmnožin $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ s vlastnostmi:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, \ \mathcal{M} \in \mathcal{O}$
2. $\cap_1^n \in \mathcal{O}$, $n < \infty$
3. $\cup_1^n \in \mathcal{O}$, $n \leq \infty$

Triviální - pouze $\emptyset \in \mathcal{O}$ a $\mathcal{M} \in \mathcal{O}$, diskrétní - všechny podmnožiny.
Spojitost v $\mathbb{R}$

Jednoduchý příklad: Kleinova grupa

Example

Mějme grupu $G = \{\{e, a, b\}, \odot\} \equiv \mathbb{Z}_3 = \{\{0, 1, 2\}, +_{mod3}\}$. Její strukturu můžeme zobrazit pomocí tabulky.

$\odot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Pokud zvolíme topologii $\tau = \{\emptyset, e, a, \{e, a\}, G\}$, nedostaneme topologickou grupu, protože vzor otevřené množiny $\{a\}$ při zobrazení $g(x) = x^{-1}$ je množina $\{b\}$, která není otevřená.

Homogenní prostor

Topologický prostor $\{M, \{\nu_i\}\}$ *nazýváme* ***homogenní****, pokud* $(\forall x, y \in M)$ *existuje homeomorfismus (spojitá bijekce se spojitou inverzí) takový, že* $f(x) = y$.

Theorem

Každá topologická grupa je homogenní topologický prostor.

Důkaz.

Pro $\forall\ x, y \in G$, $\exists!\ a = yx^{-1}$. *Určitě platí* $a \in G$ *a* $ax = yx^{-1}x = y$. *Hledaný homeomorfismus tedy bude* $f(x) = ax$ *(spojitost operací v topologické grupě).* □

Topologická grupa má lokální vlastnosti $\mathbb{R}^n$.
Proto stačí vyšetřovat topologické grupy v okolí a zobrazením lze roztáhnout po celém prostoru.

$$g(U_e) = U_g,$$

zobrazení g^{-1} je spojité.

Parametrická grupa

*Topologické grupa G se nazývá n-**parametrická**, pokud:*

1. $(\exists$ systém souřadnic $\{\varphi\}$ v $G)(\varphi : G \to \mathbb{R}^n : x \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$,
2. φ může být i pouze lokální, ale pro každé dva souřadné systémy φ, ψ musí být $\varphi \circ \psi^{-1}$ spojité (tam, kde je definované),
3. souřadnice bodu $c = a \cdot b$ jsou spojitou funkcí a a b.

Theorem

Hilbert, Pontryagin von Neumann Každá parametrická grupa je Lieova grupa, pokud ϕ a $\phi \circ \psi^{-1}$ jsou analytické.

Toto zúžení je přechod od abstraktních topologických grup k matematické analýze díky souřadnicím.

Example

Grupa $G = GL(n, \mathbb{R})$ je množina všech nesingulárních ($\det \neq 0$) reálných matic rozměru $n \times n$. Zavedeme n^2 souřadnic tak, že prvku $x \in G$, kde $x = \mathbb{I} + \tilde{x}$ ($\mathbb{I}$ je jednotková matice), přiřadíme prvky matice $\tilde{x}$, tedy $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$.
Násobení matic dá $\mathbb{I} + \tilde{z} = (\mathbb{I} + \tilde{x})(\mathbb{I} + \tilde{y})$ a $+\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{x}\tilde{y}$.
Pozn.
I u grupového násobení používáme mocniny jako u násobení čísel, tedy pro $g \in G$ píšeme g^n místo $g \cdot g \cdot \ldots \cdot g$ (n-krát).

Definujeme
Řád prvku a v grupě G je číslo n, pro které platí $(a^n = e) \wedge ((\forall m < n)(a^m \neq e))$. (Tedy nejmenší mocnina a, která dá jednotku.)

Řád grupy je počet jejích prvků (značíme $|G|$).

Pro každý $g \in G$ platí $|g| \leq |G|$. Pro nekonečný řád grupy to platí triviálně, pro konečnou grupu platí následující argument:
Vezměme posloupnost $\{g^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pro libovolný prvek $g \in G$.
Každý prvek posloupnosti je prvkem G (uzavřenost vůči násobení).
Protože G má konečný počet prvků, pak jistě existují indexy n_1, n_2 tak, že $g^{n_1} = g^{n_2}$. Z toho ale plyne $g^{n_1 - n_2} = e$, tedy g má konečný řád.
Kdyby existoval prvek s řádem $n > |G|$, pak by posloupnost $\{g^i\}_{i=0}^{n-1}$ měla n různých prvků, tj. více než kolik jich je v G, což je spor, tudíž $n \leq |G|$.

Generátory a rank grupy

Generátory *grupy jsou prvky minimálního souboru (s minimálním počtem prvků), ze kterého je možné získat celou grupu pomocí vzájemného násobení. Počet generátorů nazýváme* ***rank*** *grupy (Rank(G)).*

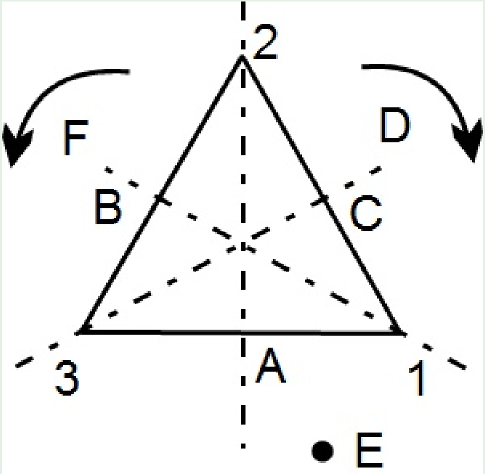
Example

Dihedrální grupa D_6 je grupa symetrií rovnostranného trojúhelníku, viz Obr. 1.

$\odot$	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

Example

Pravidla pro násobení je možné popsat vztahy $A^2 = E$, $D^3 = E$, $DA = AD^2 (= AD^{-1})$. Generátory jsou například $\{A, D\}$, a tedy $Rank(D_6) = 2$.



Obrázek: Zobrazení grupy D_6.

Example

Dihedrální grupa D_{2n} představující symetrie pravidelného n-úhelníku (n rotací a n zrcadlení). Generátory grupy jsou r (rotace o nejmenší úhel) a s (libovolné zrcadlení). Násobení je zavedeno pomocí vztahů $r^n = e$, $s^2 = e$, $rs = sr^{-1}$.

Example

Cyklická grupa $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ se sčítáním modulo n. Grupa je generována například prvkem 1 (v této grupě číslo 1 není jednotkový prvek, to je 0) ($Rank(\mathbb{Z}_n) = 1$). Ekvivalentně je možno tuto grupu zavést jako množinu $\{e^{i\frac{2\pi}{n}k}\}_{k=0}^{n-1}$ s násobením.

Example

Symetrická grupa S_Ω na množině $\Omega \neq \emptyset$ je grupa permutací prvků množiny Ω. Tedy S_Ω představuje všechny bijekce na Ω a v případě $\Omega = \hat{n}$ platí $|S_n| = n!$.

Example

Grupa kvaternionů $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ s relacemi $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Homomorfismus a isomorfismus grup

Grupy $\{G, \cdot\}$ a $\{H, \times\}$ jsou **homomorfní**, když $(\exists \varphi : G \to H)(\forall x, y \in G)(\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \times \varphi(y))$. Zobrazení φ se nazývá **homomorfismus**, popř.

- **monomorfismus**, je-li prosté,
- **epimorfismus**, je-li na H,
- **isomorfismus**, je-li bijekcí (prosté i na H),
- **endomorfismus**, je-li $G = H$ (tj. zobrazuje do sebe),
- **automorfismus**, je-li $G = H$ a isomorfní (tj. zobrazuje na sebe),

Dále definujeme **jádro** homomorfismu: Ker $\varphi = \{x \in G | \varphi(x) = e_H\}$.

Neplést homomorfismus (zobrazení zachovávající algebraickou strukturu) a homeomorfismus (spojité zobrazení se spojitou inverzí)!

Example

Grupy $GL(n,\mathbb{R})$ (nesingulární reálné matice) a $G = \{\mathbb{R}^+, \cdot\}$ (kladná reálná čísla s násobením) jsou homomorfní pomocí zobrazení $\varphi(A) = \det A$.

Example

Grupa $(\mathbb{R}, +)$ je izomorfní grupě $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ přes zobrazení $\varphi(x) = e^x$, jelikož platí $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Example

Pro libovolnou grupu G je zobrazení $\varphi : G \to G$ definované pro $\forall f \in G$ jako $\varphi(f) = gfg^{-1}$ (pro $g \in G$ pevné) automorfismus, tj. $\varphi \in \mathrm{Aut}\ H$.

Theorem

Všechny automorfismy grupy G tvoří grupu Aut G

Důkaz.

Identické zobrazení - jednotka v Aut G, protože $\varphi \in$ Aut G je bijekce, existuje φ^{-1} a $\phi \cdot \varphi = \psi$ leží v Aut G. □

Nutné podmínky pro to, aby $\varphi : G \to H$ mohlo být isomorfismus:

1. $|G| = |H|$,
2. G je abelovská právě tehdy, když H je abelovská,
3. $(\forall x \in H)(|\varphi(x)| = |x|)$.